Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФИЛИАЛ КУБАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
в г. Славянске-на-Кубани

Кафедра профессиональной педагогики, психологии и физической культуры

О. В. Игракова

Теоретические основы начального математического развития

Учебно-методическое пособие к изучению дисциплины
для студентов бакалавриата,
обучающихся по направлению
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки – Начальное образование,
Дошкольное образование)
очной и заочной форм обучения

Славянск-на-Кубани
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
2021

ББК 22.1
УДК 51
И27
Рекомендовано к печати кафедрой профессиональной педагогики, психологии и физической культуры филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани, протокол № 6 от 9.05.2021 г.

Рецензент:
Кандидат педагогических наук, доцент
У. А. Чернышева

Игракова, О. В.
И27 **Теоретические основы начального математического развития :** учеб.-метод. пособие к изучению дисциплины для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки – Начальное образование, Дошкольное образование) очной и заочной форм обучения / О. В. Игракова. – Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2021. – ___ с. 50 экз.

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Теоретические основы начального математического развития» составлено в соответствии с ФГОС высшего образования, учебным планом и учебной программой курса. В содержание пособия включены краткий теоретический материал по разделам «Множества и операции над ними», «Соответствия и отношения», «Элементы алгебры», «Логические основы математики», «Комбинаторные задачи и элементы теории вероятностей», планы практических занятий, которые содержат контрольные и проблемные вопросы, задания для работы в аудитории и вне ее, а так же задания в тестовой форме, теоретические вопросы для подготовки к экзамену и список рекомендуемой литературы. Пособие призвано помочь студентам освоить теоретический материал дисциплины, подготовиться к практическим занятиям и промежуточной аттестации.

Издание адресовано студентам бакалавриата, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки – Начальное образование, Дошкольное образование) очной и заочной форм обучения.

ББК 22.1
УДК 51

Введение

Переход начальной школы на новый Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования, возможность выбора и конструирования собственной методики обучения, задачи всестороннего развития младших школьников средствами предмета требуют от учителя хорошей математической подготовки и, прежде всего, знания научных основ начального курса математики.

Курс «Теоретические основы начального математического развития», изучающийся бакалаврами по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование по профилям «Начальное образование. Дошкольное образование», призван обеспечить необходимую подготовку студентов для успешного обучения и воспитания младших школьников, дальнейшего углубления и расширения математических знаний. Изучение данного курса тесно связано с дисциплиной «Методика преподавания математики».

Стержневыми, базисными понятиями начального курса математики являются понятие числа и величины, поэтому в курсе математики они должны занимать центральное место. Формирование этих понятий требует от студентов осознанного владения рядом общих математических понятий, таких, как множество, отношение и др. Поэтому предлагаемый материал разбит на три блока (модуля), где рассматриваются следующие разделы: «Множества и операции над ними», «Соответствия и отношения», «Элементы алгебры: числовые функции, выражения, уравнения и неравенства», «Логические основы математики (математические утверждения и их структура)», «Комбинаторные задачи и элементы теории вероятностей».

Раздел «Множества и операции над ними» знакомит студентов с основными понятиями теории множеств и его изучение связано с овладением теоретико-множественным языком, который будет использоваться не только при рассмотрении логической структуры математических понятий, предложений и доказательств, но и при построении всего курса. Знания в этой области нужны учителю начальных классов, во-первых, для понимания содержания начального курса математики, независимо от того, явно или неявно в нем используются теоретико-множественные понятия; во-вторых, для освоения таких важных с профессиональной точки зрения понятий, как взаимно однозначное соответствие, отношение, число, геометрическая фигура.

В начальной школе дети знакомятся с различными зависимостями, отношениями, но чтобы использовать их в аспекте развития мыслительной деятельности детей, учитель должен овладеть некоторыми общими понятиями современной алгебры – понятием соответствия, отношения и др. Учителю надо понимать их суть. Этой цели посвящен раздел «Соответствия и отношения».

Изучение раздела «Элементы алгебры: функции, выражения, уравнения, неравенства» связано с решением двух основных задач:

− дать обоснование тем вопросам, которые необходимы учителю для понимания ряда понятий, изучаемых в начальных классах,

– уточнить, углубить и обобщить знания студентов, полученных ими в курсе математики средней школы и сформировать соответствующие компетенции.

Раздел «Логические основы математики (математические утверждения и их структура)», включает материал, изучение которого должно способствовать совершенствованию логической грамотности студентов. Данный раздел необходим для ознакомления с особенностями математических понятий, предложений и доказательств, знание которых поможет в усвоении всего курса и позволит будущему учителю начальных классов видеть (и реализовать на практике) единство подходов к методике изучения разных по содержанию понятий и предложений, но имеющих одинаковую логическую структуру. Такие знания нужны учителю начальных классов ещё и потому, что он первым вводит детей в мир математических знаний, и от того, как грамотно и успешно он это делает, зависит и отношение ребенка к изучению математики в дальнейшем.

Будущему учителю начальных классов необходимы определенные умения и навыки решения комбинаторных задач, которые рассматриваются в разделе «Комбинаторные задачи и элементы теории вероятностей». Элементы комбинаторики изучаются с опорой на теоретико-множественные понятия, причем среди задач, решаемых на практических занятиях, имеются задачи комбинаторного характера из учебников математики для начальных классов.

Таким образом, процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС ВО направлен на формирование необходимых предметных компетенций студентов, связанных с готовностью применения знаний теоретических основ начального математического образования, использования методов развития образного и логического мышления, формирования предметных умений и навыков младших школьников.

Предлагаемое пособие содержит краткий теоретический материал по указанным разделам математики, планы практических занятий и практические задания к самостоятельной работе студентов по каждому модулю (разделу). По каждой теме приведены теоретические вопросы для подготовки к занятиям, задачи, рекомендуемые для решения в аудитории и дома. Задания подобраны различных типов, выстроены по возрастанию уровня сложности и направлены на развитие у студентов логики аналитических рассуждений. При подборе дидактического материала учитывалась профессиональная направленность, которая представлена тщательным отбором системы заданий: с ее помощью устанавливается связь изучаемого материала с начальным математическим образованием и развитием.

Материал, представленный в пособии, призван помочь студентам в ходе освоения лекционного курса, на практических занятиях и при подготовке к ним, а также к контрольным работам, тестовому контролю, экзамену. Решение предложенных задач послужит цели закрепления изученных теоретических положений и формирования навыка применения приобретенных знаний в практической деятельности, а также позволит активизировать процесс получения студентами новых знаний.

Раздел 1
Множества и операции над ними

Тема 1 «Понятие множества, способы задания множеств. Отношения между множествами»

Цель: сформировать у студентов понятие множества, элемента множества, отношения между множествами; выработать умения задавать множества различными способами, определять отношения между множествами.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 1

1. Дайте понятие множества и элемента множества.
2. Что означает пустое множество?
3. Каковы способы задания множеств?
4. Какие числовые множества вам известны?
5. Что такое характеристическое свойство?
6. Для каких множеств применим каждый из способов задания множеств?
7. Какие могут быть отношения между множествами?
8. Что называется подмножеством данного множества?
9. В каком случае множества равны?
10. Какие виды подмножеств данного множества вам известны?
11. Как подсчитать число подмножеств заданного множества?
12. Связь введенных понятий с начальным курсом математики.

Задания для работы в аудитории по теме 1

Задача №1. Укажите элементы множеств: $A=\{x: x\in \mathbf{N}, x<6\}$;

$B=\{x: x\in \mathbf{Z}, -4\leq x<3\}$;

$C=\{x: x\in \mathbf{R}, 2x^2=10\}$.

Задача №2. Запишите, используя символы:

а) число 14- натуральное,

б) число –7 не является натуральным,

в) число 0 – рациональное,

г) $\sqrt{7}$ – число действительное.

Задача №3. Прочитайте следующие высказывания, укажите среди них верные:

а) $100\in\mathbf{N}$;	б) $-8\in\mathbf{Z}$;	в) $-12\notin\mathbf{N}$;
г) $5{,}36\in\mathbf{Q}$;	д) $102\notin\mathbf{R}$;	е) $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$;
ж) $-7{,}3\in\mathbf{R}$;	з) $\frac{3}{4}\in\mathbf{N}$;	и) $0\in\mathbf{N}$.

Задача №4. Р – множество натуральных чисел, больших семи и меньших четырнадцати. Выясните, какие из чисел 13,10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Ответ запишите, используя знаки $\in$ и $\notin$.

Задача №5. М – множество точек окружности, изображенной на рисунке. Прочитайте следующие предложения и укажите среди них верные.

а) $A\in M$;	б) $O\in M$;
в) $B\in M$;	г) $C\notin M$.

Задача № 6. Как изменить условие предыдущей задачи, чтобы все утверждения а)-г) были верными?

Задача № 7. А– множество решений уравнения $x^2+1=0$. Верно ли, что А – пустое множество? Приведите пример уравнения, множество решений которого состоит из:

а) одного элемента; б) двух элементов.

Задача № 8. Из каких элементов состоит множество трехзначных чисел, составленных из цифр 1 и 3?

Задача № 9. Какие из следующих множеств пусты:

а) множество людей на Венере;
б) множество городов России с населением более 1 млн.;
в) множество параллелограммов с неравными противоположными сторонами;
г) множество квадратов без центра симметрии;
д) множество натуральных чисел, меньших 1;
е) множество двузначных чисел, меньших 9.

Задача № 10. Даны два множества $X=\{2,4,6\}$, $Y=\{0,2,4,6,8\}$. Верно ли, что:

а) множества X и Y пересекаются;
б) множество X является подмножеством множества Y;
в) множество $P=\{4,0,6,8,2\}$ равно множеству Y.

Задача №11. Известно, что элемент a содержится в множестве А и в множестве В. Следует ли из этого, что:

а) $A\subset B$; б) $B\subset A$; в) $A=B$.

Задача №12. Даны множества: $A=\{a, b, c, d, e, f, g, k\}$, $B=\{a, e, k\}$, $C=\{b, d, g, k, t\}$, $D=\{a, e\}$, $E=\{e, f, k, g, a\}$. Укажите, какие из них являются подмножествами множества А. Является ли D подмножеством С?

Задача №13. Образуйте все подмножества множества $A=\{1,2,3,4\}$.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 1

1. Укажите, какие из записей верны:

а) $270\in N$;	д) $1\frac{2}{3}\in N$;	и) $18\in Z$;	н) $22\frac{7}{8}\notin N$;
б) $1\in N$;	е) $14\notin N$;	к) $0\in Z$;	о) $-14{,}2\notin Z$;
в) $0\in N$;	ж) $-7\in N$;	л) $-27\in Z$;	п) $-14{,}2\in Z$.
г) $-70\in N$;	з) $-\frac{1}{4}\in N$;	м) $22\frac{7}{8}\notin Z$;	

2. Перечислите элементы следующих множеств:

А – множество нечетных чисел на отрезке [1;15];
В – множество натуральных чисел, меньших 8;
С – множество натуральных чисел, больших 10, но меньших 12;
Д – множество двузначных чисел, делящихся на 10;
Е – множество натуральных делителей числа 18.

3. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства, если x – действительное число:

а) $x\le -3{,}8$; б) $2{,}7\le x\le 9$.

4. Докажите, что следующие множества являются пустыми:

а) $\{x : x\in N, x<0\}$; б) $\{x : x\in N, 8<x<9\}$;

в) $\left\{x : x\in N, x=\frac{1}{3}\right\}$.

5. Найдите множество корней каждого из уравнений. Какие их этих множеств пусты:

а) $2x+3=3,\ x\in R;$ в) $x^2-4=0,\ x\in Z;$

б) $2(x-5)=3x,\ x\in R_+;$ г) $(2x+7)(x-2)=0,\ x\in R_+$.

6. Перечислите элементы следующих множеств:

А– множество нечетных однозначных чисел;

В– множество натуральных чисел, меньших или равных 20;

С– множество двузначных чисел, делящихся на 10.

7. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств:

а) {а, е, и, о, у, э, ы, ю, я};

б) {111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999}.

8. Дано множество Р={3,5,7,9}. Образуйте все возможные его подмножества. Сколько их должно быть?

9. Верны ли следующие записи:

а) $\{1,2\}\subset\{1,2,3,4\};$ б) $\{1,2\}\subset\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\};$

в) $\{1,2\}\in\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}.$

10. Равны ли следующие множества:

а) $A=\{2,4,6\}\ и\ B=\{6,4,2\};$ б) $A=\{1,2,3\}\ \ и\ \ B=\{I,II,III\};$

в) $A=\{\{1,2\},\{2,3\}\}\ и\ B=\{2,3,1\}.$

11. Пусть А={3, 1, 2}, В= $\{x: x\in N, x<4\}$. Что можно сказать о множествах А и В?

12. На плоскости даны множества: А– всех трапеций, В– всех прямоугольников, С– всех четырехугольников, Д– всех квадратов, Е– всех параллелограммов, К– всех многоугольников. Выпишите буквы, обозначающие эти множества, в таком порядке, чтобы каждая последующая обозначала подмножества предыдущего.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 1

1.1 Понятия множества и элемента множества

В математике часто рассматривают те или иные группы объектов, как единое целое: натуральные числа, треугольники и т.д. Все эти различные совокупности называют *множествами*.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Например, множество гласных букв русского алфавита, множество натуральных чисел и т. д.

Математический смысл слова «множество» отличается от того, как оно используется в обыденной речи, где его связывают с большим числом предметов. В математике этого не требуется. Можно рассматривать множество, состоящее из одного объекта и множество, не содержащее ни одного объекта.

Обозначают множества буквами латинского алфавита: A, B, C, D … Z.

Множество, не содержащее ни одного объекта, называют пустым и обозначают $\varnothing$.

Объекты, из которых образованно множество, называют элементами. Обозначают элементы малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d … z.

Предложение «объект а принадлежит множеству А» кратко запишется: $a\in A$.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные.* Например, множество дней недели, множество месяцев в году- конечные множества; множество точек на прямой, множество натуральных чисел - бесконечные.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R –множество действительных чисел.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами (множество «звеньев» во 2 «А» классе, каждое звено есть множество, состоящее из нескольких учеников класса).

В начальной школе обычно имеют дело с конечными множествами. Элементами множества могут быть самые разнообразные предметы любой природы, как конкретные (растения, животные, предметы обихода и т.д.), так и абстрактные (числа, геометрические фигуры, отношения и т.д.), или изображения таких объектов.

1.2 Способы задания множеств

Считают, что множество определяется своими элементами, т. е. множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Множество можно задать перечислив все его элементы. Например, если множество А состоит из чисел 3, 4, 5, 6, 7, то используют запись А={3,4,5,6,7}.

Однако, если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементом. В таких случаях применяют другой способ задания множеств: указывают характеристическое свойство его элементов.

Характеристическое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. Например, множество В двузначных чисел: характеристическое свойство – «быть двузначным числом».

В тех случаях, когда характеристическое свойство элементов множества можно представить в символической форме, возможна соответствующая запись множества. Например, множество С натуральных чисел, меньших 7, можно задать так: $C=\{x \mid x \in N \text{ и } x<7\}$.

Важно уметь переходить от одного способа задания множества к другому. Этому обучаются уже младшие школьники, выполняя задание «Записать числа, которые больше 65 и меньше 75».

1.3 Отношения между множествами

В математике изучаются не только те или иные множества, но и взаимосвязи между ними. Понятие множества позволяет обобщить конкретные случаи взаимосвязи между различными совокупностями.

Если множества А и В имеют общие элементы, т.е. элементы принадлежат одновременно А и В, то говорят, что эти множества пересекаются. Например, А = {a, b, c, d, e}; B = {b, d, k, m}; С = {x, y, z}. Множество А и В пересекаются, т. е. имеют общие элементы b и d, а множества А и С, а также В и С не пересекаются, поскольку не имеют общих элементов.

Рассмотрим множество А = {a, b, c, d, e} и В = {c, d, e}. Эти множества пересекаются и, кроме того, каждый элемент множества В является элементом множества А. В этом случае говорят, что множество В включается в множество А или множество В является подмножеством множества А и пишут $B \subset A$. Термин «подмножество» применяется в математике в смысле «часть множества».

Множество В является *подмножеством* множества А, если каждый элемент множества В является так же элементом множества А. Пустое множество считают подмножеством любого множества. Любое множество является подмножеством самого себя.

Из определения следует, что среди всех подмножеств заданного множества А должно быть обязательно пустое множество и само множество А, их называют *несобственными*. Все остальные подмножества будут *собственными*.

Доказано, что если множество А содержит n элементов, то у него 2^n различных подмножеств.

Рассмотрим множество: А = {a, b, c, d, e} и В = {c, a, d, b, e}. Они пересекаются и каждый элемент множества А является элементом множества В, т.е. $A \subset B$, и наоборот, т.е. $B \subset A$. В этом случае говорят, что множества А и В *равны* и пишут А=В.

Равные множества состоят из одних и тех же элементов и порядок записи элементов множества не существенен.

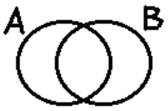
Понятие подмножества является обобщением понятия части и целого, которые осваивают младшие школьники, выполняя разные задания. Например: «Назови среди данных чисел чётные», «Среди данных четырёхугольников найди прямоугольники».

Задание! Смоделируйте случаи пустого множества и самого множества (в смысле подмножеств множества А) на конкретных ситуациях, с которыми можно познакомить учащихся начальных классов.

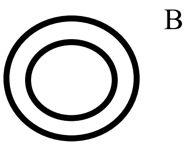
В начальных классах можно предложить вопросы, касающиеся конкретных множеств предметов с целью выявления отношений между множествами окружающих нас предметов. Например, вопросы «Все ли березы – деревья?» и «Все ли деревья – березы?». Этими вопросами выявляется отношение включения между множествами берез и деревьев. Другой пример: «Все ли автомашины красные?", «Все ли красные предметы – автомашины?», «Но имеются ли красные автомашины?». Этими вопросами выявляется отношение пересечения между множествами красных предметов и автомашин.

1.4. Изображение множеств в виде кругов Эйлера

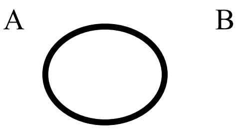
Отношения между множествами наглядно представляют при помощи особых чертежей, называемых *кругами Эйлера*. Для этого множества представляют в виде кругов, овалов или любых других геометрических фигур. Возможны следующие случаи:



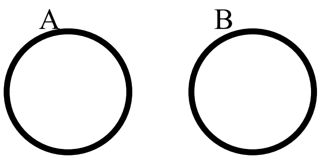
множества А и В пересекаются



множество А содержится во множестве В



множества А и В равны



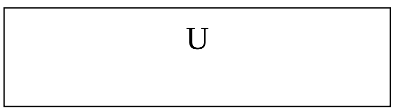
множества А и В не пересекаются

Круги или близкие к ним фигуры, точки которых изображают элементы множеств, называют *кругами Эйлера*. Изображение различных множеств в виде кругов Эйлера с учётом отношений между ними называют диаграммой Эйлера-Венна.

Универсальное множество – это самое «большое» множество, содержащее в себе все множества, рассматриваемые в задаче.

Например: если речь идёт об учениках 1 «Б» класса СОШ № 26, то универсальным множеством может служить множество всех учеников школы № 26 или множество всех учеников школ города (в зависимости от контекста).

На диаграммах Эйлера-Венна универсальные множества принято обозначать в виде прямоугольника и буквой U.



Тема 2 «Пересечение множеств. Объединение множеств»

Цель: сформировать у студентов понятие операции пересечения и объединения множеств; выработать умение изображать множества и отношение между множествами с помощью кругов Эйлера, находить пересечение и объединение множеств, заданных различными способами, пользоваться свойствами операций пересечения и объединения.

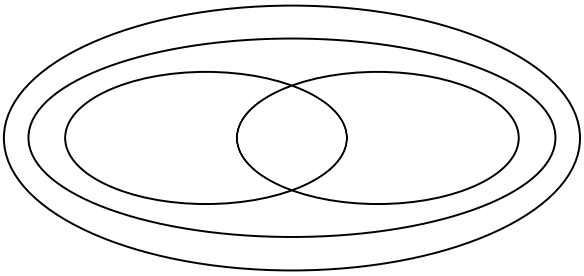
Контрольные и проблемные вопросы по теме 2

1. Как изображают отношения между множествами с помощью кругов Эйлера?
2. Что называется пересечением множеств?
3. Что называется объединением множеств?
4. Как изобразить пересечение и объединение множеств с помощью кругов Эйлера?
5. Как найти пересечение и объединение конечных множеств, заданных перечислением элементов?
6. Как найти пересечение и объединение множеств, заданных с помощью характеристического свойства элементов?
7. Каковы свойства пересечения и объединения множеств?
8. Что означает универсальное множество?
9. Какую операцию вы выполните первой, если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок?

Задания для работы в аудитории по теме 2

Задача №1. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами C и D, если:
а) C – множество двузначных чисел, D={3,43,34,56,103};
б) C – множество двузначных чисел, D – множество четных натуральных чисел;
в) C – множество двузначных чисел, D – множество трехзначных чисел;
г) C – множество двузначных чисел, D – множество натуральных чисел, не меньших 10.

Задача №2. Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников (A), параллелограммов (B), прямоугольников (C), ромбов (Д) и квадратов (E) изображены на рисунке. Покажите каждое из множеств.



Задача №3. Найдите пересечение множеств:
а) A={a, b, c, d, e, f,}, B={b, d, e, g, h};
б) A={x: $-\dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{7}{4}$ }, B={x: $-\dfrac{1}{4} \le x \le 2$}.

Задача №4. Известно, что $x \in$A. Следует ли из этого, что $x \in A \cap B$?

Задача №5. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что $x \in$A?

Задача № 6. Из каких элементов состоит пересечение множества букв в слове «МАТЕМАТИКА» и множества букв в слове «ГЕОМЕТРИЯ»?

Задача № 7. M – множество однозначных чисел, P – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит пересечение данных множеств? Содержатся ли в нем числа –7 и 9?

Задача № 8. A – множество точек окружности, B – множество точек прямой l. Из скольких элементов может состоять пересечение данных множеств? Может ли оно быть пустым?

Задача № 9. М – множество спортсменов в некоторой школе, Р – множество мальчиков в этой школе. Изобразите эти множества при помощи кругов Эйлера. Укажите характеристическое свойство элементов множества $M \cap P$.

Задача № 10. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cup B$?
Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

Задача № 11. Найдите объединение множеств, если:
а) A={a, b, c, d, e, f,}, B={b, e, f, k},
б) A={26, 39, 5, 58, 17, 81}, B={17, 26, 58}.

Задача № 12. Из каких элементов состоит объединение множества букв в словах «МАТЕМАТИКА» и «ГЕОМЕТРИЯ»?

Задача № 13. Найдите объединение множеств А и В, если $A=\{x: -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\}$, $B=\{x: -\frac{1}{4} \le x \le 2\}$.

Задача № 14. С – множество букв в Вашем имени, D – множество гласных букв русского алфавита. Найдите множество $C \cup D$ и $D \cup C$ и сравните их. Для множеств C и D постройте диаграмму Эйлера-Венна.

Задача № 15. М – объединение множества двузначных натуральных чисел и множества натуральных чисел от 1 до 7. Принадлежат ли множеству М числа: 14, 99, 100, 5, 7, 10?

Задача № 16. Школьникам предложено начертить две фигуры, принадлежащие объединению множеств C и D, если:
а) С – множество ромбов, D – множество прямоугольников;
б) С – множество равнобедренных треугольников, D – множество прямоугольных треугольников.
Выполняя задание а), учащийся К. начертил квадрат и прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Прав ли он?
Учащийся Р., выполняя задание б), начертил равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 3 см. Верно ли он выполнил задание?

Задача № 17. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:
а) У школы посадили 4 липы и 3 березы. Сколько всего деревьев посадили у школы?
б) У Коли было 6 книг. В день рождения ему подарили еще 4 книги. Сколько книг стало у Коли?

Задача № 18. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что
а) $x \in B \cap A$; б) $x \in A \cup B$; в) $x \in B \cup A$?

Задача № 19. Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:
а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \cap B \cup C \cap D$; г) $A \cup B \cap C \cup D$.

Задача № 20. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества А, В и С. Отметьте штриховкой области, изображающие множества:
а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$; в) $(A \cap B) \cup C$.

Задача № 21. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:
а) $P \cap M \cap K$; б) $P \cap (M \cup K)$; в) $P \cap M \cup P \cap K$.

Задача № 22. Даны множества: А – натуральных чисел, кратных 2, В – натуральных чисел, кратных 3, С – натуральных чисел, кратных 5.

а) Изобразите данные множества при помощи кругов Эйлера и покажите область, изображающую множество $A \cap B \cup C$.

б) Сформулируйте характеристическое свойство элементов этого множества и назовите 3 элемента, которые ему принадлежат.

в) Верно ли, что $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 2

1. Какое из данных множеств является подмножеством другого:

а) А – множество натуральных чисел, кратных 2;
В – множество натуральных чисел, кратных 6;
С – множество натуральных чисел, кратных 3.

б) А – множество треугольников;
В – множество прямоугольных треугольников;
С – множество остроугольных треугольников.

Изобразите при помощи кругов Эйлера.

2.Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А, В и С, если известно, что:

1)$A \subset B$ и $B \subset C$,

2) $A \subset B$, С пересекается с В, но не пересекается с А,

3) А, В и С пересекаются, но ни одно не является подмножеством другого. Приведите примеры для каждого случая.

3. Найдите пересечение множеств А и В, если:

а) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{b, e, f, k\}$;

б) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58\}$;

в) $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

4. Р – множество двузначных натуральных чисел, S – множество всех нечетных натуральных чисел. Какие числа входят в множество $K = P \cap S$? Верно ли, что

а) $21 \in K$; в) $7 \notin K$;

б) $32 \in K$; г) $17 \notin K$?

5. Найдите пересечение множества различных букв, входящих в слово «МАТЕМАТИКА», и множества различных букв, входящих в слово «ГРАММАТИКА»?

6. Используя координатную прямую, найдите пересечение множеств решений неравенств, в которых x – действительное число:

а) $x > -2$ и $x > 0$; в) $x \geq 5$ и $x < -7{,}5$;

б) $x > -3{,}7$ и $x \leq 4$; г) $-2 < x < 4$ и $x \geq -1$;

д) $-7 \leq x \leq 5$ и $-6 \leq x \leq 2$.

7. Из 100 учащихся, изучающих английский и немецкий языки, 85 изучают английский, 45 – немецкий. Сколько человек изучают оба языка?

8. Найдите объединение множеств А и В, если $A = \{26, 39, 5, 58, 17, 81\}$, $B = \{17, 26, 58, 5, 39, 81\}$.

9. М – множество однозначных чисел; Р – множество нечетных натуральных чисел. Из каких чисел состоит объединение данных множеств? Содержатся ли в нем числа –7 и 9?

10. $A = \{n : n \in N, n < 5\}$, $B = \{n : n \in N, n > 7\}$. Найдите объединение этих множеств. Верно ли, что $4 \in A \cup B$; ?

11. Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества А, В и С и отметьте штриховкой области, изображающие множества:

а) $(A \cup B) \cap C$; б) $A \cup B \cap C$; в) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

12. Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:
а) $(P \cap M) \cap K$; б) $P \cup (M \cap K)$; в) $(M \cup P) \cap (P \cup K)$.

13. Даны множества: X – двузначных чисел, Y – четных натуральных чисел, P – натуральных чисел, кратных 4.

а) Укажите характеристическое свойство элементов каждого из множеств А и В, если $A = X \cap Y \cap P$, $B = X \cap (Y \cap P)$.

б) Изобразите множества X, Y, P при помощи кругов Эйлера и покажите области, представляющие множества А и В (для каждого случая выполняйте отдельный рисунок).

в) Верно ли, что $24 \in A$, а $23 \in B$?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 2

2.1 Операции над множествами: пересечение множеств

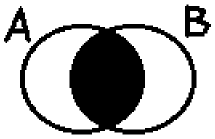
Из элементов двух и более множеств можно образовать новые множества.

Пусть даны два множества: А = {2, 4, 6, 8} и В = {5, 6, 7, 8, 9}.

Образуем множество С, в которое включим общие элементы множеств А и В, т. е. С = {6, 8}. Полученное множество С называется пересечением множеств А и В.

Пересечением множеств А и В называют множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В.

Пересечение обозначают А∩В. Изображение пересечения с помощью кругов Эйлера:



Если множества А и В не имеют общих элементов, то говорят, что их пересечение пусто и пишут А∩В =∅.

Если элементы множеств А и В перечислены, то чтобы найти А∩В достаточно перечислить элементы, которые одновременно принадлежат множеству А и множеству В, т. е. их общие элементы.

Если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов, то характеристическое свойство множества А∩В составляется из характеристических свойств пересекаемых множеств с помощью союза «и».

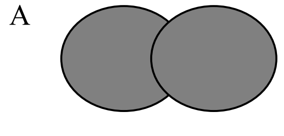
Задание! Подберите несколько примеров пересекающихся и непересекающихся множеств из начального курса математики.

2.2 Объединение множеств

Пусть даны два множества А={2,4,6,8} и В={5,6,7,8,9}. Образуем множество D, в которое включим элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств, т. е. А или В: D= {2,4,5,6,7,8,9}. Полученное множество называется объединением множеств А и В.

Объединением множеств А и В называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.

Объединение обозначают А∪В. С помощью кругов Эйлера объединение множеств изобразиться так:



Если элементы множеств А и В перечислены, то чтобы найти А∪В, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В.

Если множества заданы характеристическими свойствами своих элементов, то характеристическое свойство множества $A \cup B$ составляется из характеристических свойств множеств A и B с помощью союза «или».

Умение вычленять множества в задачах, и операции, которые над ними выполняются, – важный этап в их решении. Чтобы правильно выбрать действие, с помощью которого решается задача: «В букете 3 ромашки и 4 колокольчика. Сколько всего цветов в букете?», надо понять, что в задаче рассматриваются два множества – множество ромашек (3 элемента) и множество колокольчиков (4 элемента). Эти множества объединены в одно, и требуется найти число элементов в этом объединении.

2.3 Свойства пересечения и объединения множеств

Если обратиться к пересечению и объединению множеств, то можно увидеть, что в них не фиксируется порядок оперирования множествами (при объединении к элементам одного множества можно присоединить элементы другого, а можно поступить наоборот) – это означает, что пересечение и объединение обладают переместительным (или коммутативным) и сочетательным (или ассоциативным) свойством.

Свойства пересечения:

1. Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap U = A$
6. $A \cap A = A$

Свойства объединения:

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$
2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
4. $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup U = U$
6. $A \cup A = A$

Взаимосвязь пересечения и объединения множеств отражается в распределительных или дистрибутивных свойствах этих операций. Таких свойств два:

1. Пересечение дистрибутивно относительно объединения множества, т. е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство:
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. Объединение дистрибутивно относительно пересечения множеств, т. е. для любых множеств A, B и C выполняется равенство:
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, так как считают, что пересечение более «сильная» операция, чем объединение.

Понятие пересечения и объединения множеств можно обобщить на любое конечное число множеств.

ТЕМА 3 «ВЫЧИТАНИЕ И ДОПОЛНЕНИЕ МНОЖЕСТВ»

Цель: сформировать у студентов понятие операций вычитания и дополнения множеств; выработать умение находить вычитание и дополнение множеств, заданных различными способами.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 3

1. Что называется разностью двух множеств?
2. Что называется дополнением множества?
3. Как изобразить разность и дополнение при помощи кругов Эйлера?
4. Какие свойства разности вам известны?

5. Как практически найти разность двух множеств, заданных перечислением своих элементов?
6. Как практически найти разность двух множеств, заданных характеристическими свойствами своих элементов?

Задания для работы в аудитории по теме 3

Задача № 1. Известно , что $x \in$ A\B. Следует ли из этого, что:

а) $x \in$A; б) $x \in$ B?

Задача № 2. Найдите разность множеств A и B, если
A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={2, 4, 6, 8, 10}.

Задача № 3. Даны множества: A– натуральных чисел, кратных 3, B – натуральных чисел, кратных 9. Сформулируйте характеристическое свойство элементов множества B_A'. Верно ли, что 123$\in$ B_A', а 333$\notin$$B_A$'?

Задача № 4. Найдите дополнение множества У до множества X, если:
а) X – множество точек прямой AB, У – множество точек отрезка AB,
б) X – множество точек квадрата, У – множество точек круга, вписанного в этот квадрат.

Задача № 5. Из каких чисел состоит дополнение:

а) множества натуральных чисел до множества целых,
б) множества целых чисел до множества рациональных.

Задача № 6. Начертите три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A, B и C, и выделите области, представляющие множества:

а) A$\cup$B\C; б) A\C$\cup$B\C; в) A\B$\cap$C.

Задача № 7. A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Из каких чисел состоят множества:

а) (A$\cap$B)\C; б) (A$\cup$B)\C.

Задача № 8. Проиллюстрируйте при помощи кругов Эйлера, что для любых множеств A, B и C таких, что B$\subset$C, C$\subset$A, истинны равенства:

а) A\(B$\cup$C)=(A\B)$\cap$(A\C); б) A\(B$\cap$C)=(A\B)$\cup$(A\C).

Задача №9. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A, B и C, и выделите области, представляющие множества:

а) A\B$\cup$C; б) A\(B$\cup$C).

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 3

1. Найдите разность множеств A и B, если

а) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$; $B = \varnothing$;
б) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$; $B = \{1,3,5\}$;
с) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$; $B = \{6,2,3,4,5,1\}$.

2. Найдите дополнение множества У до множества X, если X – множество прямоугольников, У – множество квадратов.

3. Из каких чисел состоит дополнение множества рациональных чисел до множества действительных.

4. Постройте три круга, изображающие три попарно пересекающиеся множества A, B и C, и выделите область, представляющую множество (A\B)$\cap$C .

5. A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Из каких чисел состоят множества:

а) $(A \cap C) \setminus B$; б) $C \cup B \setminus A$?

6. Даны множества: $P=\{x\colon x \in R,\ \frac{11}{4} \le x \le \frac{32}{5}\}$, $Q=\{x\colon x \in R,\ \frac{19}{7} \le x \le \frac{19}{3}\}$, $S=\{x\colon x \in R,\ 3 \le x \le 15\}$. Укажите характеристическое свойство элементов множества $S \setminus P \cap Q$.

7. О какой операции и над какими множествами идет речь в следующих задачах:

а) У Коли 10 книг, 2 книги он подарил товарищу. Сколько книг осталось у Коли?

б) В зале было 100 стульев. После того как вынесли несколько стульев, в зале осталось 86 стульев. Сколько стульев вынесли из зала?

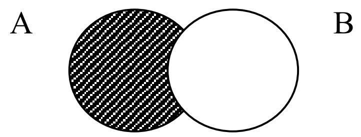
Теоретический материал для освоения и осмысления темы 3
3.1 Вычитание множеств. Дополнение множества

Если заданы два множества, то можно вычесть из одного множества другое. Результат вычитания называется разностью и определяют следующим образом.

Разностью множества A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

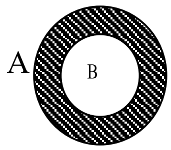
Обозначают разность $A \setminus B$. Тогда по определению: $A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$.

С помощью кругов Эйлера разность изобразится следующим образом:



В школьном курсе математики чаще всего приходиться выполнять вычитание множеств в случае, когда одно из них является подмножеством другого, при этом разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B до множества A и обозначают $B'_A = A \setminus B$.

С помощью кругов Эйлера дополнение изображают:



Пусть $B \subset A$. *Дополнением* множества B до множества A называется множество, содержащее все элементы множества A, которые не принадлежат множеству B.

Если элементы множеств A и B перечислены и $B \subset A$, то чтобы найти дополнение достаточно перечислить элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие множеству B.

В случае, когда указаны характеристические свойства элементов множества A и B и известно, что $B \subset A$, то множество B'_A задают так же с помощью характеристического свойства, общий вид которого «$x \in A$ и $x \notin B$».

Условились считать, что пересечение – более «сильная» операция, чем вычитание. Что касается объединения множеств и вычитания, то их считают равноправными.

Вычитание множеств обладает рядом свойств, т. е. для любых множеств A, B и C справедливы следующие равенства:

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$,
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Тема 4 «Разбиение множества на классы»

Цель: сформировать у студентов понятие разбиения множества на классы; выработать умение правильно производить классификацию множеств, разбивать множества на классы при помощи свойств.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 4

1. Что такое классификация множеств и с чем она связана?
2. Каковы условия разбиения множества на классы?
3. В разбиении множества на классы с помощью одного, двух, трех, …, *n* свойств каково количество классов разбиения в каждом случае?

Задания для работы в аудитории по теме 4

Задача № 1. Из множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} выделили подмножества X_1, X_2, X_3. В каком из следующих случаев множество X оказалось разбитым на классы:

а) X_1={1, 3, 5, 7, 11}, X_2={2, 4, 6, 8, 10, 12}, X_3={9};

б) X_1={1, 3, 5, 7, 9, 11}, X_2={2, 4, 6, 8, 10, 12}, X_3={10, 11, 12};

в) X_1={3, 6, 9, 12}, X_2={1, 5, 7, 11}, X_3={2, 10}?

Задача № 2. Из множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} выделили подмножества:

а) A – четных чисел, B – нечетных чисел;

б) A – чисел, кратных 2, B – чисел, кратных 3, C – чисел, кратных 4;

в) A – нечетных однозначных чисел, B – четных двузначных чисел.

В каком случае произошло разбиение множества на классы?

Задача № 3. На какие классы разбивается множество точек плоскости при помощи:

а) окружности; б) прямой.

Задача № 4. На множестве натуральных чисел рассматривается свойство «быть кратным 7». Сколько классов разбиения множества натуральных чисел оно определяет? Назовите по два элемента из каждого класса.

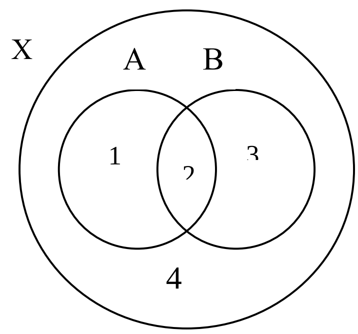
Задача № 5. Из множества четырехугольников выделили подмножество фигур с попарно параллельными сторонами. На какие классы разбивается множество четырехугольников с помощью свойства «иметь попарно параллельные стороны»? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

Задача № 6. Изобразите при помощи кругов Эйлера множество N натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество N разбито:

а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;

б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7.

Задача № 7. На рисунке изображены множество X – студентов группы, A – множество спортсменов этой группы, B – множество отличников этой группы. Укажите классы разбиения множества X, полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.



Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 4

1. Из множества треугольников выделили подмножества треугольников:

а) прямоугольные, равнобедренные, равносторонние;

б) остроугольные, тупоугольные, прямоугольные;

в) равносторонние, прямоугольные, тупоугольные.

В каком случае произошло разбиение множества треугольников на классы?

2. На множестве четырехугольников рассматриваются два свойства: «быть прямоугольником» и «быть квадратом». На какие классы разобьется множество четырехугольников при помощи этих свойств? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

3. Изменится ли ответ предыдущей задачи, если на множестве четырехугольников рассмотреть свойства:

а) «быть прямоугольником» и «быть ромбом»;

б) «быть прямоугольником» и «быть трапецией».

4. X– множество студентов группы, A– множество спортсменов этой группы, B – множество отличников этой группы.

а) Выполните рисунок и укажите классы разбиения множества X, полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.

б) Сколько получилось бы классов разбиения, если бы ни один отличник группы не был спортсменом? Выполните соответствующий рисунок и назовите классы разбиения.

5. О каких множествах и операциях над ними идет речь в задаче: «С одной грядки сняли 25 кочанов капусты, а с другой – 15 кочанов. Всю эту капусту разложили в корзины, по 8 кочанов в каждую. Сколько потребовалось корзин?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 4

4.1 Понятие разбиения множества на классы

В жизни приходится сталкиваться с задачами классификации. В науке проблема классификации является одной из самых важных задач. Особенно хорошо это видно на примере ботаники, где существует очень сложная «многоступенчатая» классификация растений.

В математике буквально с первых лет обучения дети узнают, что бывают числа, записываемые с помощью одного знака и двух знаков. Более старшие ученики узнают, что есть еще трехзначные, четырехзначные и т. д. записи чисел.

Классификация – действие распределения объектов по классам.

Любая *классификация* связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество X разбито на классы $X_1, X_2 \ldots X_n, \ldots$, если:

1. подмножества $X_1, X_2 \ldots X_n, \ldots$ не пересекаются,

2. объединение подмножеств $X_1, X_2 \ldots X_n, \ldots$ совпадает с множеством X.

Если не выполнено хотя бы одно из условий, классификацию считают неправильной.

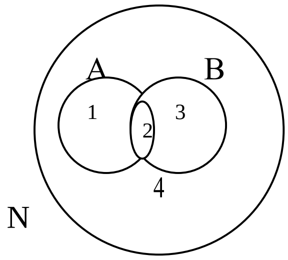
4.2 Разбиение множества на классы с помощью свойств

Так как разбиение множества на классы связано с выделением его подмножеств, то классификацию можно выполнять при помощи свойств элементов множеств.

Рассмотрим, например, множество натуральных чисел. Его элементы обладают разными свойствами. Предположим, что нас интересуют числа, обладающие свойством «быть кратным 3». Это свойство позволяет выделить из множества натуральных чисел подмножество, состоящее из чисел, кратных 3. Тогда про остальные числа можно сказать, что они не кратны 3, т. е. получаем еще одно подмножество множества натуральных чисел. Так как выделенные подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством натуральных чисел, то получаем разбиение этого множества на два класса.

Вообще, если на множестве X задано *одно свойство*, то это множество разбивается на *два класса*. Первый – класс, обладающий этим свойством, а второй – класс объектов, не обладающих этим свойством. Такая классификация называется *дихотомической.*

Рассмотрим ситуацию, когда для элементов множества N заданы два свойства: «быть кратным 3» и «быть кратным 5». При помощи этих свойств из множества натуральных чисел можно выделить два подмножества: A – подмножество чисел кратных 3, B – подмножество чисел кратных 5. Эти множества пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.



Разбиения множества натуральных чисел на подмножества A и B не произошло, но круг, изображающий множество N, можно рассматривать как состоящий из четырех непересекающихся областей. Каждая область изображает некоторое подмножество множества N:

1– множество чисел кратных 3, но не кратных 5,

2– множество чисел кратных 3 и кратных 5,

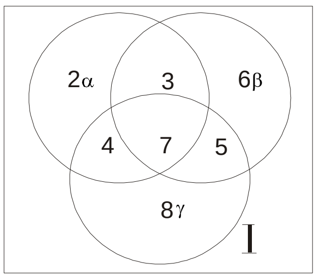
3– множество чисел кратных 5, но не кратных 3,

4– множество чисел не кратных 3 и не кратных 5.

Объединение этих четырех подмножеств есть множество N.

Таким образом, выделение *двух свойств* привело к разбиению множества **N** натуральных чисел на *четыре класса*.

В случае разбиение множества на классы с помощью 3-х свойств изображение следующее:



Нетрудно подсчитать, что получилось в этом случае восемь классов. Они помечены цифрами от 1–8.

Таким образом, можно подметить закономерность: *при разбиении множества на классы с помощью n свойств получается* $\boldsymbol{2^n}$ *классов разбиения*.

Задание! Приведите пример и опишите задание из начальной школы, в котором применяется классификация объектов (с помощью одного и двух свойств).

ТЕМА 5 «ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ И ЕГО СВОЙСТВА»

Цель: сформировать у студентов понятие декартова произведения множеств; выработать умение находить и изображать декартово произведение двух числовых множеств на координатной плоскости, пользоваться свойствами декартова произведения при решении задач.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 5

1. Что такое упорядоченные пары?

2. Что называется декартовым произведением двух множеств?

3. Как можно задать декартово произведение множеств?

4. Как можно изобразить наглядно декартово произведение двух числовых множеств?

5. Что называется кортежем? Длиной кортежа?

6. Дайте определение декартова произведения *n* множеств.

7. Какие свойства декартова произведения вам известны?

8. Обладает ли декартово произведение множеств свойствами коммутативности и ассоциативности?

Задания для работы в аудитории по теме 5

<u>*Задача № 1*</u>. Дано уравнение $2x–3=y$. Запишите несколько решений данного уравнения. Что представляет собой каждое решение? Является ли пара (4; 5) решением данного уравнения? А пара (5; 4)?

<u>*Задача № 2.*</u> Элементами множеств А и В являются пары чисел:
А={(1,12), (2, 9), (3, 6), (4, 3), (5, 0)},
В= {(1, 9), (2, 7), (3, 6), (4, 7), (5, 0)}.
Найдите пересечение и объединение данных множеств.

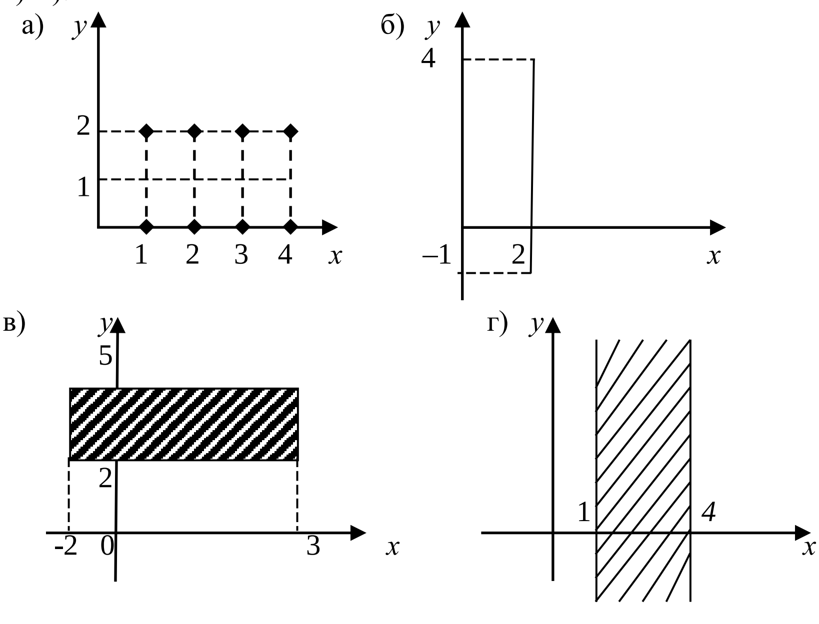
<u>*Задача № 3*</u>. Перечислите элементы декартова произведения А×В, если:
а) А = {a, в, c, d}; В = {b, k, l};
б) А =В= {a, в, c}.

<u>*Задача № 4*</u>. Запишите различные двузначные числа, используя цифры 3, 4, 5. Сколько среди них таких, запись которых начинается с цифры 3?

<u>*Задача № 5*</u>. Проверьте справедливость равенства
(А∪В)×С=(А×С)∪(В×С) для множеств А={3,5,7}, В={7,9}, С={0,1}. Выполняется ли для них равенство (А\В)×С=(А×С)\(В×С)?

<u>*Задача № 6*</u>. Изобразите в прямоугольной системе координат множество А×В, если А= [–2;2], В= {2,3,4}.

<u>*Задача № 7*</u>.Определите, декартово произведение каких множеств Х и У изображено на рисунках а)–г):



Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 5

1. Даны два множества: А={1, 3, 5} , В={2, 4}. Перечислите элементы множеств А×В и В×А. Верно ли, что:
   а) множества А×В и В×А содержат одинаковое число элементов;
   б) множества А×В и В×А равны?

2. Запишите множества (А×В) ×С и А×(В×С), если А={0,1}, В= {1}, С={2,3}.

3. Сколько букв в слове «барабан»? Сколько различных букв в этом слове? Сформулируйте эту задачу, используя понятия множества и кортежа.

4. Выполняется ли для множества А={3,5,7,8,9}, В={8,9}, С={0,1,2} равенство (А\В)×С=(А×С)\(В×С)?

5. Изобразите в прямоугольной системе координат множество А×В, если:
а) А=[–2, 2], В=(2; 4); б) А=**R**, В=[2, 4].

6. Изобразите на координатной плоскости элементы декартова произведения множества:
а) Х×У, если Х={x: $x\in\mathbf{Z}$, $-3\le x\le 3$}, У={y: $y\in\mathbf{R}$, $-1\le y\le 2$};
б) Х×Х, если Х={x: $x\in\mathbf{R}$, $-1\le x\le 6$}.

7. Покажите графически, что декартово произведение множеств А={3,2,1} и В={4,4,6} не обладает переместительным свойством.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 5
5.1 Декартово произведение множеств и его свойства

Используя две цифры, например, 3 и 5, можно записать четыре двузначных числа: 35, 53, 33, 55. Несмотря на то, что числа 35 и 53 записаны с помощью одних и тех же цифр, числа различны. В том случае, когда важен порядок следования элементов, в математике говорят об упорядоченных наборах элементов.

Упорядоченную пару, образованную из элементов а и в, принято записывать, используя круглые скобки: (*а; в*). Элемент *а* называется *первой координатой (компонентой) пары*, а элемент *в – второй координатой (компонентой) пары*.

Пары (*а; в*) и (*с; d*) равны в том случае, когда *а=с и в=d.*

Упорядоченные пары можно образовывать как из элементов одного множества, так и двух множеств. Пусть, например, А={1,2,3}, В={3,5}. Образуем упорядоченные пары так, чтобы первая компонента принадлежала множеству А, а вторая – множеству В. Перечислив все такие пары, получим множество: {(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)}. Это множество называют декартовым произведением множеств А и В.

Декартовым произведением множеств А и В называется множество всех пар, первая компонента которых принадлежит множеству А, а вторая компонента принадлежит множеству В.

Обозначают декартово произведение А×В.

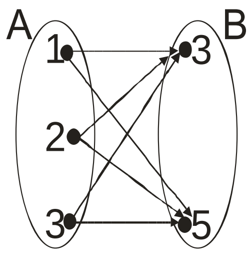
Так как декартовы произведения А×В и В×А состоят из различных элементов, то операция нахождения декартова произведения множеств свойствами коммутативности и ассоциативности не обладает. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т. е. для любых множеств А, В и С выполняются равенства:

1. (А∪В)×С=(А×С)∪(В×С),
2. (А\В) ×С=(А×С)\(В×С).

Задание! Показать самостоятельно справедливость невыполнения свойств коммутативности и ассоциативности.

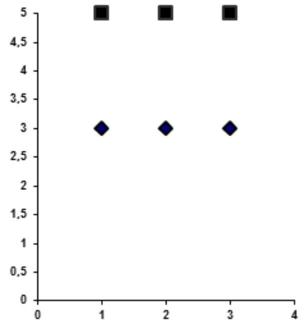
5.2 Графическое изображение декартова произведения двух множеств

Если множества А и В конечны и содержат небольшое число элементов, то можно изобразить декартово произведение этих множеств при помощи графа или таблицы. Например, декартово произведение множеств А={1,2,3} и В={3,5} можно представить так:



А \ В	3	5
1	(1,3)	(1,5)
2	(2,3)	(2,5)
3	(3,3)	(3,5)

Декартово произведение двух числовых множеств (конечных и бесконечных) можно изображать на координатной плоскости, так как каждая пара чисел может быть единственным образом изображена точкой на этой плоскости. Например, декартово произведение $A \times B$ множеств $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3,5\}$ на координатной плоскости будет выглядеть так:



Заметим, что элементы множества А мы изобразили на оси *0x*, а элементы множества В – на оси *0y*. Такой способ наглядного представления декартово произведения двух числовых множеств удобно использовать в случае, когда хотя бы одно из них бесконечное.

5.3 Понятие кортежа. Декартово произведение *n* множеств

В математике и других науках рассматривают не только упорядоченные пары, но и упорядоченные наборы из трех, четырех и т.д. элементов. Например, запись числа 367 – это упорядоченный набор из трех элементов, а запись слова «математика» – это упорядоченный набор из 10 элементов.

Упорядоченные наборы часто называют *кортежами* и различают по длине. *Длина кортежа* – это число элементов, из которых он состоит. Например, (3; 6; 7) – это кортеж длины 3, (м, а, т, е, м, а, т, и, к, а) – это кортеж длины 10.

Рассматривают в математике и декартово произведение трех, четырех и вообще *n* множеств.

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2 ,..., A_n$ называется множество всех кортежей длины *n,* первая компонента которых принадлежит множеству A_1, вторая – множеству A_2 ,..., *n*-я – множеству A_n.

Декартово произведение множеств A_1, A_2 ,..., A_n обозначают так: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

ТЕМА 6 «ЧИСЛО ЭЛЕМЕНТОВ В ОБЪЕДИНЕНИИ, РАЗНОСТИ И ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ»

Цель: выработать умение находить число элементов в объединении, разности и декартовом произведении множеств при решении конкретных задач.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 6

1. По какой формуле можно найти число элементов в объединении двух непересекающихся множеств?
2. По какой формуле можно найти число элементов в объединении двух любых множеств?
3. Какова формула нахождения числа элементов разности двух конечных множеств.
4. По какой формуле находится число элементов в декартовом произведении множеств?

Задания для работы в аудитории по теме 6

Задача № 1. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21 – немецкий язык, а 15 – английский и немецкий. Сколько студентов курса не изучают ни немецкий, ни английский языки?

Задача № 2. В третьем классе дети коллекционируют марки и монеты. Марки коллекционируют 8 человек, монеты – 5 человек. Всего коллекционеров 11. Сколько человек коллекционируют только марки? Сколько только монеты?

Задача № 3. Из 38 учащихся класса 24 занимаются в хоре и 15 в лыжной секции. Сколько учащихся занимаются и в хоре, и в лыжной секции, если в классе нет учащихся, не посещающих занятий хора или лыжной секции.

Задача № 4. В группе туристов, состоящей из 100 человек, 10 человек не знали ни немецкий, ни французский языки, 75 знали немецкий, 83 знали французский. Сколько туристов знали два языка?

Задача № 5. У Маши 3 различных юбки и 4 различных кофты. Сколько различных комплектов, состоящих из юбки и кофты, она может составить?

Задача № 6. Множество А содержит 7 элементов. Сколько элементов в множестве В, если декартово произведение А×В состоит из:

а) 42 элементов; б) 7 элементов.

Задача № 7. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 4 и 7? (Решите задачу разными способами).

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 6

1. Из 32 школьников 12 занимаются в волейбольной секции, 15 – в баскетбольной, 8 человек занимаются и в той, и в другой секции. Сколько школьников не занимаются ни в волейбольной, ни в баскетбольной секции?

2. Катя положила в коробку 4 зеленых круга, 6 треугольников и 3 красных многоугольника. Всего в коробке оказалось 11 фигурок. Сколько среди них красных треугольников?

3. В школе 70 учеников. Из них 27 ходит в драмкружок, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов. 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не ходят в драмкружок?

4. В школе 400 учащихся. Из них в музыкальных кружках занимается 130 человек, а в спортивных кружках – 190 человек. Известно, что одновременно и спортом, и музыкой занимаются 40 человек. Сколько человек занимаются только в одном кружке?

5. Сколько различных наборов можно составить из книги и блокнота, если имеется 20 видов различных книг и 15 видов различных блокнотов?

6. Решите задачу методом перебора всех возможных вариантов, а затем покажите, что решение связано с определением числа элементов декартова произведения множеств: «В костюмерной танцевального кружка имеются белые и розовые кофты, а также синие, черные и коричневые юбки. Сколько можно из них составить различных костюмов?»

7. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1,2,3,4, если цифры в записи числа : 1) повторяются; 2) не повторяются?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 6

6.1 Число элементов в объединении и разности конечных множеств

Чтобы найти число элементов объединения двух конечных непересекающихся множеств, достаточно найти это объединение и пересчитать элементы. Но можно определять число элементов в объединении конечных множеств, не образуя его и не обращаясь к пересчету элементов.

Условимся предложение «Множество А содержит a элементов» записывать в таком виде: $n(A)= a$.

Можно доказать, что если в множестве А содержится a элементов, а в множестве В – b элементов и множества А и В не пересекаются, то в объединении множеств А и В содержится $a + b$ элементов, т. е.

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) = a + b$$

Это правило нахождения числа элементов в объединении двух конечных *непересекающихся* множеств, его можно обобщить на случай *t* попарно непересекающихся множеств.

В общем виде правило подсчета элементов в объединении двух конечных множеств может быть представлено в виде формулы:

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Нетрудно убедиться в том, что если $B\subset A$, то

$$n(B'_A) = n(A)-n(B),$$

т. е. число элементов дополнения подмножества B до данного конечного множества A равно разности численностей этих множеств.

Полученные формулы для подсчета числа элементов в объединении двух и более множеств можно использовать для решения текстовых задач.

6.2 Число элементов в декартовом произведении конечных множеств

Выясним, как узнать, сколько элементов находится в декартовом произведении множеств A и B, не прибегая к нахождению самого декартова произведения и пересчету его элементов.

Можно доказать, что если в множестве A содержится *a* элементов, а в множестве B – *b* элементов, то в декартовом произведении множеств *A* и *B* содержится $a \cdot b$ элементов, т. е.

$$n(A\times B) = n(A)\cdot n(B) = a \cdot b .$$

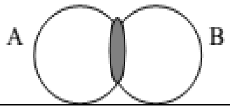
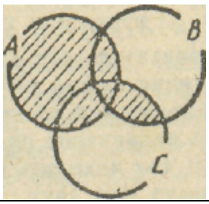
Правило распространяется на случай *t* множеств, т. е.

$$n(A_1 \times A_2\times ... \times A_t) = n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot ... \cdot n(A_t).$$

Полученные формулы можно использовать при решении задач.

Тестовые задания по разделу 1

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Выбери утверждение, соответствующее записи $10\in \mathbf{Z}$	1) 10 принадлежит множеству целых чисел 2) 10 принадлежит множеству рациональных чисел 3) 10 принадлежит множеству действительных чисел 4)10 принадлежит множеству натуральных чисел
2	A является подмножеством B, если…	1) A={1;2}, B={3;4} 2) A={2;3}, B={3;2;1} 3) A={3;4}, B={1;2} 4)A={1;3}, B={2;4}
3	Пустое множество является подмножеством	1) только самого себя 2) конечного множества 3) бесконечного множества 4) любого множества
4	Если множество A = {3;4;10}, B = {2;6;7;9}, то $A\cap B$ =…	1) $\varnothing$ 2) {2;3;4;6;7;9;10}, 3) {2}, 4) {3;4;6;7;9;10}.
5	Множество A={3,4} содержит … подмножеств	1) 2 2) 4 3) 6 4) 8
6	Если на множестве X задано три свойства, то это множество разбивается на:	1) 2 класса 2) 4 класса 3) 1 класс 4) 8 классов
7	Декартово произведение множеств нельзя изображать:	1) при помощи графа 2) с помощью таблицы 3) на координатной оси 4) на координатной плоскости
8	Если множество A={1;2;7;8}, B={0;1;7;10}, то A\ B=…	1) {1} 2) {0;2;8;10} 3) $\varnothing$ 4) {2;8}

9	Назовите подмножество множества натуральных чисел:	1) {0,1,2,3,5} 2) {-3,-2,-1,0} 3) {1,2,3,4} 4) {-1,0,1,2}
10	Декартово произведение множеств A={m, p} и B={e, f, k} есть множество	1) A×B={(m, e), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p,k)} 2) A×B={(m, p), (m, f), (m, k), (p, e), (p, f), (p, k)} 3) A×B={(e, m), (f, m), (k, m), (e, p), (f, p), (k, p)} 4)A×B=$\varnothing$
11	Если множество A={1;2;7;8}, B={1;7;10}, то $A\cup B=\dots$	1) {1} 2) {2;8;10} 3) $\varnothing$ 4) {1;2;7;8;10}
12	Множества A и B называются равными, если:	1) они состоят из одних и тех же элементов 2) $A\not\subset B, B\subset A$ 3) $A\subset B, B\not\subset A$ 4) $A\not\subset B, B\not\subset A$
13	Среди перечисленных свойств выделите дистрибутивное свойство объединения относительно пересечения множеств	1) $A\cup B=B\cup A$ 2) $A\cup(B\cup C)=A\cup(B\cup C)$ 3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
14	На рисунке A и B находятся в отношении:  	1) включения множеств 2) объединения множеств 3) равенства множеств 4) пересечения множеств
15	На рисунке штриховкой обозначена следующая область:  	1) $A\setminus B\cup C;$ 2) $A\setminus B\cap C;$ 3) $A\cap B\cup C;$ 4) $A\cup B\cap C.$

РАЗДЕЛ 2
СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ
ТЕМА 7 «СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОЖЕСТВАМИ»

Цель: сформировать у студентов понятие соответствия; выработать умение задавать соответствия между элементами двух множеств, различных способов задания соответствий, строить графы и графики различных соответствий.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 7

1. Что называется соответствием? Обозначение.
2. Какие виды соответствий вы знаете?
3. Какие способы задания соответствий вам знакомы?
4. Что представляет собой граф и график соответствия?
5. Какое соответствие называется взаимно однозначным?
6. Что значит соответствие обратное данному?
7. Что называется отображением?
8. Какие множества называются равномощными?
9. Есть ли разница между равными и равномощными множествами?
10. Каковы особенности графов и графиков взаимно обратных соответствий?
11. Какое множество называется счетным?

Задания для работы в аудитории по теме 7

Задача № 1. Вычислив длины заданных отрезков, учащийся записал: АВ=7 см, СД=12 см, KL=15 см, ХУ=12 см. Соответствия между какими множествами он установил? Задайте его при помощи графа.

Задача № 2. Даны множества: Х={2,5}, У={3,6}. Перечислите элементы декартова произведения данных множеств и образуйте все подмножества полученного множества. Какое из подмножеств задает соответствие:

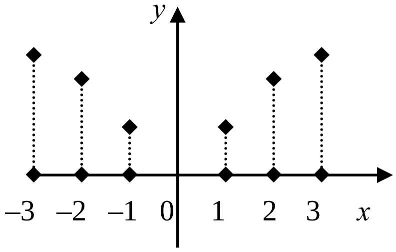
а) «большее»; б) «меньшее»;
в) «меньшее на 1»; г) «меньшее в 3 раза»?

Задача № 3. Соответствие «число x в два раза больше числа y» рассматривается между множествами Х и У. Каким будет его график, если:

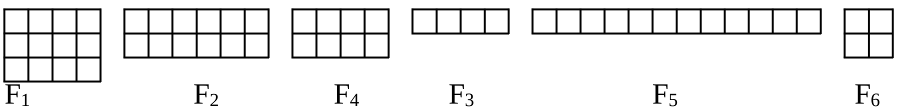
а) Х = {2,4,6,8}, Y = **N**; б) Х = [2,8], Y = **R**, в) Х = Y = **R**.

Задача № 4. Множества Х= {1,3,4,6}, Y = {0,1} находятся в соответствии S={(1;1); (3;0); (3;1); (4,0), (4;1); (6;1)}. Задайте соответствие S^{-1}, обратное соответствию S, и постройте на одном чертеже их графики.

Задача № 5. Постройте график соответствия, обратного данному.



Задача № 6. Х – множество прямоугольников на рисунке, У=**N**. Между элементами этих множеств установлено соответствие Р: «прямоугольник х имеет площадь, равную у». Постройте граф соответствия Р. Является ли оно взаимно однозначным?



Задача № 7. Даны множества A={1,2,5}, B={3,7}. Найдите A×B и B×A. Верно ли, что найденные множества равномощны?

Задача № 8. Покажите, что множество A счетно, если A={9,10, 11, 12, …}.

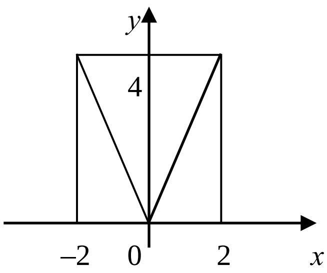
Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 7

1. Между множествами X={0,1,2,3,4,5} и У=**Z** задано соответствие «$x-y=3$», причем $x\in$X, $y\in$У. Какая фигура является графиком этого соответствия?

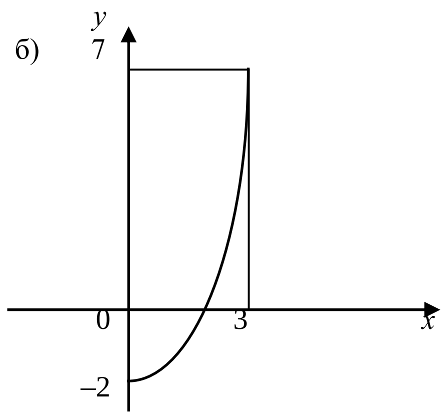
2. Даны множества: M={–1, 1, –2, 2, –3, 3, 0, –4, 4} и **N** – множество натуральных чисел. Соответствие R между элементами этих множеств – «квадрат числа m равен числу n», причем m∈M, n∈**N**. Запишите множество пар, находящихся в заданном соответствии. Верно ли, что:
а) (–3,9)∈R; б) (0,0)∈R; в) (–4, 16)∈R?

3. Постройте графики соответствий, обратных данным

а)



б)



4. Покажите, что множество A счетно, если
а) A={a: $a=3n$, $n\in$**N**}; б) A={a: $a=n^2$, $n\in$**N**}.

5. Даны множества X={k, l, m, n, p} и У={1, 2, 3, 4, 5}. Установите три различных взаимно однозначных соответствия между данными множествами. Сколько всего таких соответствий можно установить между множествами X и У?

6. Докажите, что множества, о которых идет речь в следующих задачах, равномощны:
1) Запиши все двузначные числа, которые меньше, чем 20. Увеличь каждое из них в 5 раз.
2) Запиши все четные однозначные числа и увеличь каждое из них в три раза. Какие получились числа: четные или нечетные?

7. Соответствие R={(–1,0), (–1,1), (–1,2), (0,0), (1,0), (2,0), (2,1), (2,2)} задано между множествами X={–1,0,1,2,3} и {–2,0,1,2}. Постройте граф данного соответствия. Постройте в прямоугольной системе координат графики соответствия R и R^{-1}, обратного данному.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 7
7.1 Понятие соответствия между двумя множествами

Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но и главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями.

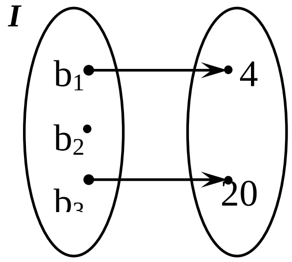
Можно говорить, например, о соответствии между множеством магазинов и множеством покупателей (каждому магазину соответствует покупатель, который его посетил).

В начальном курсе математики изучаются различные взаимосвязи между элементами одного, двух и более множеств. Поэтому учителю надо понимать их суть, что поможет ему обеспечить единство в методике изучения этих взаимосвязей.

Пример соответствия, изучаемого в начальном курсе математики: найти значение выражения:
b_1) (17–1):4,

b_2) (12+18):(6–6),
b_3) 2·7+6.

В данном примере устанавливается соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями. Имеем два множества: множество из трех числовых выражений и множество **N** натуральных чисел. Выполняя это задание, мы устанавливаем связь (соответствие) между этими множествами. Ее можно представить наглядно, при помощи графа.



Можно задать это соответствие, перечислив все пары элементов, находившихся в нем: $\{(b_1,4), (b_3,20)\}$.

Таким образом, любое соответствие между двумя множествами X и У можно рассматривать как множество упорядоченных пар, образованных из их элементов.

Соответствием между множествами X и У называется всякое подмножество декартового произведения этих множеств.

Соответствие обозначают буквами: P, S, T, R и др. Если S – соответствие между элементами множеств X и У, то по определению $S \subset X \times У$.

7.2 Способы задания соответствий

Поскольку соответствие – это подмножество, то его можно задавать как любое множество, т. е. либо перечислив все пары элементов, находящихся в заданном соответствии (способ перечисления пар), либо указав характеристическое свойство элементов этого подмножества (словесный способ). Например, соответствие между множествами X={1,2,4,6} и У = {3,5} можно задать:

1) при помощи предложения с двумя переменными: $а < в$ при условии, что $а \in X$; $в \in У$;
2) перечислив пары чисел, принадлежащих подмножеству декартового произведения $X \times У$: {(1,3); (1,5); (2,3); (2,5); (4,5)}. К этому способу задания относят соответствие при помощи графа и графика (графический).

Если множества конечны, то соответствия между ними можно задать с помощью таблицы (табличный способ). Например:

Ф. И. О.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Иванов А.И.						
Петров И.С.						
Сидоров К. А.						
Никитин О.И.						
Козлов П.В.						
Панова Л.Н.						

Соответствие можно задать формулой, выражающей зависимость между элементами множеств X и Y (аналитический способ).

7.3 Соответствие, обратное данному

Пусть, например, S – это соответствие «больше на 2» между множествами X= {4,5,8,10} и У={2,3,6}. Тогда S = {(4,2),(5,3),(8,6)}.

Соответствие, обратное данному – это соответствие «меньше на 2». Оно рассматривается между множествами У и X, и чтобы его представить наглядно, достаточно на графе соответствия S направление стрелок поменять на противоположное. Обозначают соответствие, обратное данному S^{-1}. Тогда S^{-1} = {(2,4),(3,5),(6,8)}.

Задание! Построить графы соответствий S и S^{-1}, указанных в примере.

Предложение «элемент x находится в соответствии S с элементом y» записывается кратко: $x\ S\ y$.

Пусть S – соответствие между множествами X и У. Соответствие S^{-1} между множествами У и X называется *обратным данному,* если у S^{-1}x , тогда и только тогда, когда xSy.

Соответствия S и S^{-1} называют *взаимно обратными*.

Графики взаимно обратных соответствий S и S^{-1} симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Задание! Убедиться в этом с помощью построения соответствий, указанных в вышеизложенном примере.

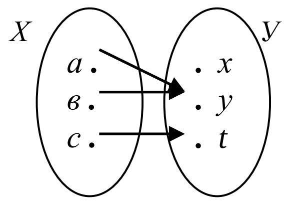
7.4 Отображения. Взаимно-однозначное соответствие

В математике выделяют различные виды соответствий. Это неслучайно, поскольку взаимосвязи, существующие в окружающем нас мире, многообразны.

Важный частный случай понятия соответствия – отображения множеств. При соответствии между множествами X и У образ элемента $a \in X$ может оказаться пустым, а может содержать и несколько элементов.

Отображением множества X в множество У называется такое соответствие между этими множествами, что образ любого элемента $a \in X$ состоит из одного и только одного элемента множества У.

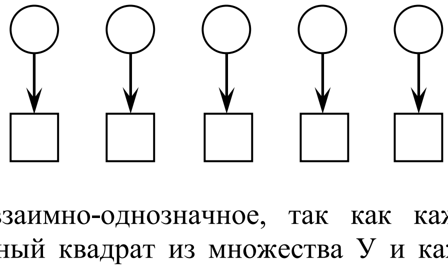
Таким образом, график отображения множества X в множество У не может содержать двух различных пар (a, y_1) и (a, y_2) с одной и той же первой компонентой. При этом для любого $a \in X$ в нем найдется пара вида $(a, в)$, где $в \in У$. На графе отображения X в У из каждой точки множества X будет выходит одна и только одна стрелка.



Пример: X– множество студентов в аудитории, У – множество столов в той же аудитории, причем каждый студент сидит за одним из столов. Соответствие «Студент *x* сидит за столом *y*» задает отображение X в У. Образом студента *x* при этом отображении является стол, за которым он сидит.

Взаимно-однозначным соответствием между множествами X и У называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества X сопоставляется единственный элемент множества У и каждый элемент множества У соответствует только одному элементу множества X.

Пример: X– множество кружков, У– множество квадратов и соответствие между ними задано при помощи стрелок.



Это соответствие взаимно-однозначное, так как каждому кружку из множества X сопоставляется единственный квадрат из множества У и каждый квадрат из У соответствует только одному кружку из множества X.

Множества X и У называются *равномощными,* если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обозначают X~У.

Равномощными могут быть как конечные, так и бесконечные множества. Равномощные конечные множества называют еще *равночисленными.* В начальном курсе обучения математике равночисленность выражается словами «столько же».

Понятие равночисленности множеств лежит в основе определения отношений «больше на …», «меньше на …».

Если бесконечное множество равномощно множеству N натуральных чисел, то его называют *счетным.*

ТЕМА 8 «ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ И ИХ СВОЙСТВА »

Цель: сформировать у студентов понятия бинарного отношения на множестве, отношения эквивалентности и порядка; выработать умение задавать отношения различными способами, определять свойства отношений на множестве, строить графы и графики отношений, четко различать отношение эквивалентности и отношение порядка.

Контрольные и проблемные вопросы по теме

1. Что называется бинарным отношением на множестве? Обозначения.
2. В чем состоит разница отношения и соответствий?
3. Какие способы задания отношений вы знаете?
4. Какие виды отношений вам известны?
5. Как построить граф отношения?
6. Какие свойства отношений вам известны? Дайте им определение
7. Какое отношение называется отношением эквивалентности?
8. Какова связь отношения эквивалентности с разбиением множества на классы?
9. Какое отношение называется отношением порядка?
10. Какое множество называется упорядоченным?
11. Какое отношение называется отношением линейного порядка?
12. Какое отношение называется отношением нестрогого порядка?

Задания для работы в аудитории по теме 8

Задача № 1. На множестве X = {0; 3; 6; 9; 12; 15; 18} задано отношение R. Перечислите пары чисел, связанных этим отношением, и постройте его граф, если:

а) R– «*x* больше *y* в 3 раза»;

б) R – «*x* больше *y* на 3» .

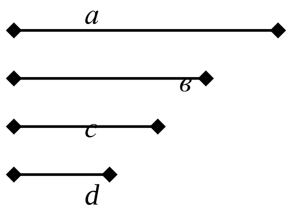
Задача № 2. Запишите в виде равенства предложение:

а) число *x* меньше у на 2;   б) число *x* меньше у в 2 раза.

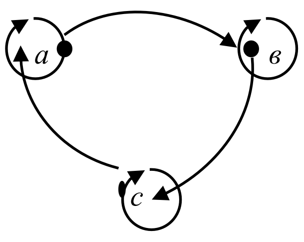
Задача № 3. Задает ли на множестве X={2,4,6,8} какое-либо отношение следующее множество упорядоченных пар: {(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)}?

Задача № 4. Отношение «$x \geq y$» рассматривается на множестве X. Каким будет его график на координатной плоскости, если X = {2, 4, 6, 8}?

Задача № 5. На множестве отрезков рисунка задано отношение P: «отрезок *x* длиннее отрезка *y*». Постройте граф этого отношения и задайте различными способами отношение, обратное данному.



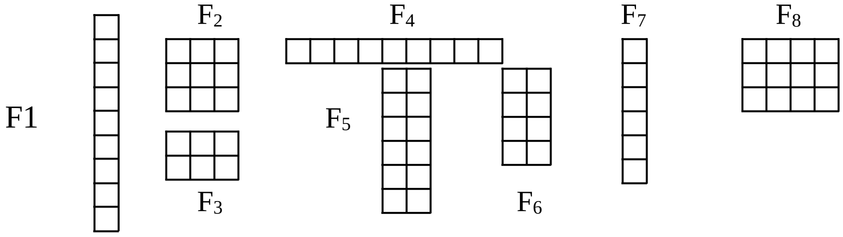
Задача № 6. Докажите, что отношение R, заданное при помощи графа, рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.



Задача № 7. На множестве отрезков задано отношение «короче». Верно ли, что оно антисимметрично и транзитивно? Рефлексивно ли оно?

<u>Задача № 8</u>. Какими свойствами обладает отношение «меньше», заданное на множестве натуральных чисел?

<u>Задача № 9.</u> На множестве X прямоугольников задано отношение «иметь равные площади». Постройте граф отношения и докажите, что оно является отношением эквивалентности. Какие классы эквивалентности порождает это отношение на множестве X?



<u>Задача № 10</u>. На множестве X={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} задано отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 4». Является ли оно отношением эквивалентности?

<u>Задача № 11</u>. Можно ли разбить множество X={7–3, 2^2, 5· 2, 60 : 6, 1+3, 0 : 4, 0·10, 4:(10–10)} на классы при помощи отношения «иметь равные значения»?

<u>Задача № 12.</u> На множестве целых чисел от 0 до 999 задано отношение К – «иметь в записи одно и тоже число цифр». Покажите, что К – отношение эквивалентности. На сколько классов эквивалентности разбивается данное множество при помощи отношения К? Назовите наименьший и наибольший элементы каждого класса.

<u>Задача № 13.</u> X – множество отрезков. Какие из следующих отношений являются отношениями порядка на этом множестве:

а) «*x* равно *y*»; б) «*x* длиннее *y*»; в) «*x* длиннее *y* в 3 раза».

<u>Задача № 14</u>. Упорядочивает ли множество натуральных чисел отношения:

а) «больше в 2 раза»; б) «больше на 2»;
в) «непосредственно следовать за»; г) «*x* – делитель *y*».

<u>Задача № 15</u>. Решите задачу для младших школьников и укажите свойства отношений, которые были при этом использованы: «Мальчик составил пирамидку из трех колечек: желтого, красного и зеленого. В каком порядке он расположил колечки, если желтое больше зеленого, а красное меньше зеленого?»

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 8

1. На множестве X={2, 4, 6, 8} рассматриваются отношения «$x=y$», «$x \vdots y$» и «x больше y на 2». Какое из приведенных подмножеств множества X×X задает данные отношения:
а) {(4,2), (6,2), (8,2), (6,4), (8,4), (8,6), (2,2), (4,4), (6,6), (8,8)};
б) {(4,2), (6,4), (8,6)};
в) {(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)}.

2. Отношение «$x \geq y$» рассматривается на множестве X. Каким будет его график на координатной плоскости, если:
а) X – множество натуральных чисел;
б) X – множество действительных чисел.

3. На множестве X={2, 4, 6, 8, 12} заданы отношения «больше» и «кратно». В чем их сходство и различие?

4. На множестве X={a, в, c} задано отношение R={(a, в), (a, a), (в,в), (c, c), (в, a), (в, c), (c, в)}. Какими свойствами оно обладает?

5. На множестве X={2, 3, 4, 5, 6} заданы отношения «больше» и «больше или равно». Постройте графы и сформулируйте свойства данных отношений. Какое из них обладает свойством рефлексивности? Почему?

6. Постройте граф отношения «легче, чем», между элементами множества А={кролик, заяц, собака, поросенок}, если известно, что заяц тяжелее собаки, кролик легче поросенка, а собака тяжелее поросенка. Кто из животных самый легкий и кто самый тяжелый?

7. Решите задачу, используя граф бинарного отношения. «Дано пять чисел. Известно, что первое больше пятого, второе меньше третьего, пятое больше третьего, а четвертое меньше пятого. Какое из чисел больше: первое или четвертое? Пятое или второе? Можно ли утверждать, что второе число меньше четвертого?»

8. Объясните, почему отношение равенства отрезков является отношением эквивалентности, а отношение «короче» не является?

9. X – множество прямых плоскости. Какое из следующих отношений является отношением эквивалентности на этом множестве:
а) «*x* параллельна *y*»; б) «*x* перпендикулярна *y*»; в) «*x* пересекает *y*».

10. Сколько классов эквивалентности порождает на множестве натуральных чисел отношение «оканчиваться одной и той же цифрой»? Назовите по одному представителю каждого класса.

11. Отношение Т – «иметь одно и тоже число делителей» – задано на множестве X={1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11}. Является ли Т отношением эквивалентности? Отношением порядка?

12. Решите задачу для младших школьников и укажите свойства отношений, которые были при этом использованы:
«Четверо учащихся получили разные оценки за контрольную работу. Игорь получил оценку выше, чем Петр, Петр ниже, чем Максим, но выше, чем Кирилл. Кто получил самую низкую оценку?»

13. На множестве А натуральных чисел от1 до 100 рассматривают отношение R– «*а* имеет ту же четность, что и *в*». Является ли это отношение эквивалентностью? На какие классы эквивалентности распадается множество А по данному отношению?

14. Множество А состоит из капитана Иванова, старших лейтенантов Остапчука и Григорьева, лейтенантов Осипенко, Васильева и Шатилова, прапорщиков Семенова, Лебедева и Кравчука. Изобразите при помощи графа отношение R – «*а* старше по званию, чем *в*» в этом множестве. Является ли R каким-либо отношением порядка?

15. Какие из следующих отношений между людьми являются отношениями эквивалентности, а какие отношениями порядка:
а) «а сестра в»; б) «а начальник в»;
в) «а друг в»; г) «а имеет тот же цвет глаз, что и в»;
д) «а на 4 см выше, чем в»; е) «а родился в том же году, что и в»?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 8

8.1 Понятие отношения на множестве

В математике изучают не только связи между элементами двух множеств, т. е. соответствия, но и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями.

Отношения многообразны. Между понятиями – это отношения рода и вида, части и целого, между предложениями – отношения следования и равносильности, между числами – «больше», «меньше», «равно» и т. д.

Если рассматриваются отношения между двумя элементами, то их называют *бинарными.* Примеры бинарных отношений встречаются не только в математике, но и всюду в жизни, вокруг нас: родственные и другие отношения между людьми (быть отцом, сестрой и т. д.), отношения между событиями во времени (раньше, позже, одновременно), между предметами по их расположению в пространстве (выше, ниже, левее и др.)

Пусть на множестве X={2, 4, 6, 8} задано отношение «меньше». Это означает, что для любых двух чисел из множества X можно сказать, какое из них меньше: 2<4, 2<6, 2<8, 4<6, 4<8, 6<8. Полученные неравенства можно записать в виде упорядоченных пар: (2; 4), (2;6), (2;8), (4;6), (4;8), (6;8). Но все эти пары есть элементы декартова произведения X×X.

Бинарным отношением на множестве X называют всякое подмножество декартова произведения X×X.

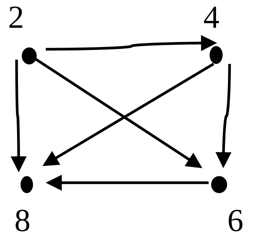
Обозначаются отношения так же как и соответствия буквами: S, P, T, R и др. Если R – отношение на множестве X, то по определению, R⊂X×X.

Элементы x и y находятся в отношении R кратко записывают xRy (читается: «элемент x находится в отношении R с элементом y»).

8.2 Способы задания отношений

Отношения задаются также как и соответствия. Отличия касаются задания отношений при помощи графа.

Построим, например, граф отношения «меньше», заданного на множестве X = {2,4,6,8}. Для этого элементы множества X изобразим точками (вершины графа), а отношение «меньше» – стрелками (ребра графа).



Отношение можно задать при помощи предложения с двумя переменными. Например, «число x меньше числа y» или в символической записи (если это возможно) «$x<y$».

Для отношения R, заданного на множестве X, всегда можно задать отношение R^{-1}, ему обратное. Оно определяется также, как соответствие, обратное данному.

Понятием отношения, обратного данному, часто пользуются при начальном обучении математике.

8.3. Свойства отношений

Отношения обладают свойствами.

Отношение R на множестве X называется *рефлексивным,* если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.

Если отношение R рефлексивно на множестве X, то в каждой вершине графа данного отношения имеется петля. Справедливо и обратное утверждение. Например: отношение «равенства» на множестве натуральных чисел.

Отношение R на множестве X называется *симметричным,* если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x.

Пример симметричного отношения: отношение перпендикулярности на множестве отрезков.

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от x к y, граф содержит и стрелку, идущую от y к x. Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется *антисимметричным,* если для различных элементов x и y из множества X выполнено условие: из того, что x находится в отношении R с элементом y, следует, что элемент y в отношении R с элементом x не находится.

Например: отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка одна. Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется *транзитивным,* если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z.

Пример транзитивного отношения: отношение «длиннее» на множестве отрезков.

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от x к y и y к z, содержит стрелку, идущую от x к z. Справедливо и обратное утверждение.

Отношение R на множестве X называется *связанным,* если для любых элементов x и y из множества X, выполняется условие: из того, что x и y различны, следует, что либо x находится в отношении R с элементом y, либо элемент y находится в отношении R с элементом x.

Например, свойством связанности обладает отношение «больше» на множестве натуральных чисел.

На графе связанного отношения любые две вершины соединены стрелкой.

8.3 Отношение эквивалентности и порядка

Отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности,* если оно одновременно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Примерами отношений эквивалентности могут служить отношения равенства на множестве дробей, равенства геометрических фигур и т. д.

Вообще, если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности). Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, то оно является отношением эквивалентности.

Если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам.

Отношение R на множестве X называется *отношением порядка* (или отношением строгого порядка), если оно одновременно обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.

Примерами отношений порядка могут служить: отношение «короче» на множестве отрезков, отношение «выше» на множестве людей, сравниваемых по росту.

Множество X называется *упорядоченным,* если на нем задано отношение порядка.

Так, множество N натуральных чисел можно упорядочить, если задать на нем отношение «меньше».

Тестовые задания по разделу 2

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Каким свойством обладает отношение «точка X симметрична точке У относительно прямой L»	1) рефлексивности 2) антирефлексивности 3) транзитивности 4) симметричности
2	Каким свойством обладает отношение «отрезок X длиннее отрезка У»	1) транзитивности 2) симметричности 3) рефлексивности 4) антисимметричности
3	Каким свойством обладает отношение «число X следует за У»	1) рефлексивности 2) симметричности 3) антисимметричности 4) транзитивности
4	Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно одновременно обладает свойствами:	1) связанности, транзитивности и антисимметричности; 2) рефлексивности, симметричности и транзитивности; 3) антисимметричности, транзитивности и рефлексивности; 4)симметричности, транзитивности и связанности.
5	Если S – соответствие между элементами множеств X и У , то по определению:	1) $S\subset X\cap У$, 2) $S\subset X\times У$, 3) $S\subset X\cup У$, 4) $S\subset X\backslash У$.
6	Если S – соответствие «x больше y на 3», тогда S^{-1}– это соответствие:	1) «y меньше x на 3», 2)«x не меньше y на 3», 3) «x меньше y на 3»,

		4) «у не меньше х на 3».
7	Отношениями называют связи между:	1) элементами двух множеств; 2) элементами одного множества; 3) элементами трех множеств; 4) множествами.
8	R рефлексивно на X тогда и только тогда, когда:	1) xRx для любого $x \in X$, 2) $xRy \Rightarrow yRx$, 3) xRy и $x \neq y \Rightarrow yRx$, 4) xRy и $yRz \Rightarrow xRz$.
9	Граф симметричного на множестве X отношения обладает особенностью:	1) в каждой вершине графа имеется петля, 2) вместе с каждой стрелкой, идущей от х к у, граф содержит и стрелку, идущую от у к х, 3) если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна, 4) с каждой парой стрелок, идущих от х к у и у к z, граф содержит стрелку, идущую от х к z.
10	Если отношение, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, то оно является:	1) отношением порядка, 2) отношением эквивалентности, 3) отношением линейного порядка, 4) рефлексивным.

РАЗДЕЛ 3
ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ: ФУНКЦИИ, ВЫРАЖЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА

ТЕМА 9 «ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ»

Цель: сформировать у студентов понятия числовой функции, графика функции, рассмотреть свойства, способы задания и виды функций; выработать умения выявлять функциональные зависимости, строить графики заданных функций, использовать свойства прямой и обратной пропорциональности и линейной функции при решении задач из начального курса математики.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 9

1. Что называется функцией? Обозначение.
2. Что значит область определения функции? Множество значений?
3. Что называется графиком функции?
4. Какие способы задания функции Вам известны?
5. Какая функция является монотонной, возрастающей, убывающей на некотором промежутке?
6. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
7. Что является графиком прямой пропорциональности?
8. Каковы свойства прямой пропорциональности?
9. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
10. Что является графиком обратной пропорциональности?
11. Каковы свойства обратной пропорциональности?
12. Приведите пример заданий из начального курса математики с использованием прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин.
13. Какая функция называется линейной?
14. Что является графиком линейной функции?
15. Каковы свойства линейной функции?
16. От чего зависит расположение графика линейной функции?

Задания для работы в аудитории по теме 9

Задача № 1. Какие из следующих функций задают на множестве **R** действительных чисел функцию:

а) $y = 4x$; б) $y = \frac{4}{x}$; в) $x^2+y^2= 4$.

Задача № 2. Постройте график функции $y = 5 – x$, если ее область определения такова:

а) $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, б) $X = [0, 5]$, в) $X=\mathbf{R}$.

Задача № 3. Функция f задана при помощи таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

а) укажите ее область определения и область значений,
б) задайте функцию f при помощи формулы,
в) постройте график этой функции на координатной плоскости,
г) докажите, что функция f возрастает на всей области определения.

Задача № 4. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 5x^2 – 4$; б) $y = \frac{3}{x+5}$; в) $y = \sqrt{1-x}$, г) $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x}$.

Задача № 5. Докажите, что соответствие между значениями переменных x и y, рассматриваемое в задаче, является функцией. Укажите область ее значений при условии, что $x<5$; постройте график данной функции.

«Катя купила 3 тетради, а Лена на x тетрадей больше. Сколько тетрадей (y) купила Лена и Катя вместе?»

Задача № 6. Известно, что функция *f* является прямой пропорциональностью, задана на множестве X = {1,2,3,4,5,6} и при *x*, равном 3, значение функции равно 12.

а) задайте функцию *f* при помощи формулы и таблицы, постройте ее график;

б) какие свойства функции *f* можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

Задача № 7. Укажите среди следующих функций, заданных табличным способом,

а) прямые пропорциональности:

x	2	4	6	8	10
y	14	28	42	56	70

x	1	2	3	4	5
y	–3	$-\frac{2}{3}$	–9	$-\frac{4}{3}$	–15

x	2	4	6	8	10
y	4	16	36	64	100

x	1	2	3	4	5
y	0,2	0,4	0,6	0,8	1

б) обратные пропорциональности:

x	2	3	6	8	12
y	12	8	4	3	1

x	1	2	4	10	40
y	20	10	5	2	$\frac{1}{2}$

x	-2	-4	-3	6	12
y	6	3	4	-2	-1

x	1	3	4	6	8
y	-1	-5	-7	-11	-15

Задача № 8. Построить график функции y = $\frac{12}{x}$ при условии, что ее область определения:

1) множество действительных чисел;
2) (0; ∞);
3) [1; 6];
4) {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Задание 9. Постройте график функции y=2x–3 при условии, что ее областью определения является:

а) **R**; б) [–3; 2]; в) {–2; –1; 0; 1; 2; 3}.

Задание 10. Известно, что график функции *y*=2*x*+*b* проходит через точку (1; 4). Пройдет ли он через точку (3; 8)?

Задание 11. Найдите коэффициенты *k* и *b*, если функция задана формулой:

1) x–2x= –3; 2) 2x–3y =10; 3) x–3y=0.

Задание 12. Зависимость массы (y) ящика с деталями от числа деталей (x) выражается формулой y=0,3*x*+1,5. Вычислите массу ящика с деталями, при следующих значениях:

x	10	15	20	23
y				

Каким будет график данной зависимости?

Задача 13. До привала туристы прошли 12 км. После привала они шли x часов со скоростью 2,5 км/ч. Составьте формулу, выражающую зависимость между временем движения x и всем пройденным расстоянием y. Какую функцию задает эта формула? Какова область определения функции, если весь пройденный путь не превышает 25 км?

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 9

1. Постройте графики следующих функций при условии, что они заданы на множестве **R** действительных чисел:

а) y = x ; б) y = 3; в) x = 5; г) y = 0.

2. Докажите, что соответствие между значениями переменных x и y, рассматриваемое в задаче, является функцией. Укажите область ее значений при условии, что x<5; постройте график данной функции.

«Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли 2 туриста. При встрече оказалось, что один прошел 3 км, а второй – на x км больше. Каково расстояние (y км) между пунктами А и В?»

3. Найдите область определения функций:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$; б) $y = \sqrt{4 - x^2}$.

4. Постройте графики функций y=–2x и y=10x и покажите, что первая из них – убывающая на множестве **R**, а вторая – возрастающая на том же множестве.

5. Выясните, какая зависимость существует между величинами в данной задаче и решите ее:

«Вместимость одной банки 3 литра. Сколько потребуется банок, чтобы разлить 6 литров фруктового сока? 9 литров? 12 литров?

6. Известно, что функция *f* является обратной пропорциональностью. Задана на множестве X ={1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} и при x=5, значения функции равно 6.

а) задайте функцию *f* при помощи формулы и таблицы. Постройте ее график;

б) какие свойства функции можно проиллюстрировать при помощи таблицы и графика?

7. Зависимость стоимости (y) телеграммы от числа слов (x) в ней выражается формулой y=5x +20. Вычислите стоимость телеграммы при следующих значениях x:

x	10	16	25	30
y				

Какова область определения данной зависимости, если стоимость телеграммы не превышает 120 рублей?

8. Из населенного пункта в город, находящийся на расстоянии 20 км со скоростью 5 км/ч отправился пешеход. На каком расстоянии (S км) от города будет пешеход через t часов? Какие значения может применять t ?

9. Дана функция y = –0,4x–2 , $x \in R$. Постройте ее график и укажите те значения x, при которых y>0, y<0, y<– 4.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 9

9.1 Понятие функции

Функция – одно из важнейших понятий математики.

В начальном курсе математики понятие функции и все, что с ним связано, в явном виде не изучается, но идея функциональной зависимости пронизывает его.

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R.

Множество X называют *областью определения* функции.

Функции принято обозначать буквами *f, g, h* и др. Если *f* – функция, заданная на множестве X, то действительное число *y,* соответствующее числу *x* из множества X, часто обозначают *f(x)* и пишут *y = f(x).* Переменную *x* при этом называют *аргументом* (или независимой переменной) функции *f*. Множество чисел вида *f(x)* для всех *x* из множества X называют *областью значений* функции f.

Пусть *y= f(x)*– функция с областью определения X. Тогда ее *графиком* является множество таких точек координатной плоскости, которые имеют абсциссу *x* и ординату *f(x)* для всех *x* из множества X.

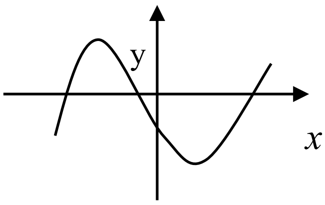
9.2 Способы задания функции

1. С помощью формулы.

Формула указывает, как по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции Например, формула $y = 2x - 3$, где x – действительное число, задают функции.

С помощью одной и той же формулы можно задать сколь угодно много функций, которые будут отличаться друг от друга областью определения. Часто при задании функции с помощью формулы ее область определения не указывается. В таких случаях считают, что область определения функции является область определения выражения *f(x).*

2. С помощью графика.



Не каждое множество точек на координатной плоскости представляет собой график некоторой функции.

3. С помощью таблицы.

Например,

x	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3

9.3 Свойства числовых функций

Функция f называется *монотонной* на некотором промежутке A, если она на этом промежутке возрастает или убывает.

Функция f называется *возрастающей* на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

График возрастающей на промежутке A функции обладает особенностью: при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика увеличиваются.

Функция f называется *убывающей* на некотором промежутке A, если для любых чисел x_1, x_2 из множества A выполняется условие: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

На графике убывающей на промежутке A функции при движении вдоль оси абсцисс слева направо по промежутку A ординаты точек графика уменьшаются.

9.4 Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы y=kx, где k– не равное нулю действительное число.

Число *k* называется *коэффициентом пропорциональности.*

Функция *y=kx* является математической моделью многих реальных ситуаций, рассматриваемых в начальном курсе математики.

Некоторые свойства прямой пропорциональности:

1) Область определения функции *y=kx* и область её значений – множество действительных чисел.

2) Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.

3) При *k* > 0 функция *y=kx* возрастает на всей области определения, при *k*<0 – убывает на всей области определения.

4) Если значениями переменных *x* и *y* служат положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной x в несколько раз соответствующее значение переменной y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Это свойство характерно только для прямой пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются прямо пропорциональные величины.

Задание! Решите задачу разными способами**:**

*«*За 8 ч токарь изготовил 16 деталей. Сколько часов потребуется токарю на изготовление 48 деталей, если он будет работать с той же производительностью?»

9.5 Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы $y = \frac{k}{x}$, где k – не равное нулю действительное число, x, y – переменные, k – коэффициент пропорциональности.

Функция $y = \frac{k}{x}$ является математической моделью многих задач, решаемых в начальном курсе математики.

Свойства обратной пропорциональности:

1) Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ и область ее значений x является множество действительных чисел, отличных от нуля.

2) Графиком обратной пропорциональности является гипербола.

3) При k>0 ветви гиперболы расположены в 1-й и 3-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является убывающей на всей области определения x (рисунок 1*)*. При k<0 ветви гиперболы расположены в 2-й и 4-й четвертях и функция $y = \frac{k}{x}$ является возрастающей на всей области определения x (рисунок 2).

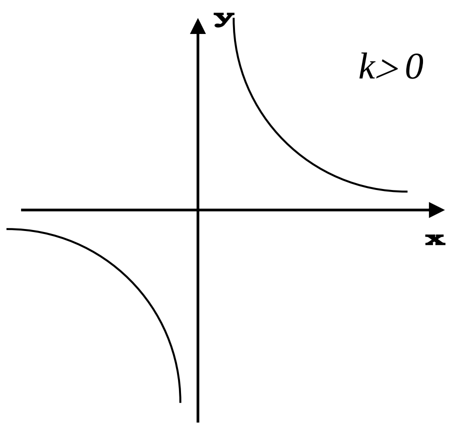


Рисунок 1

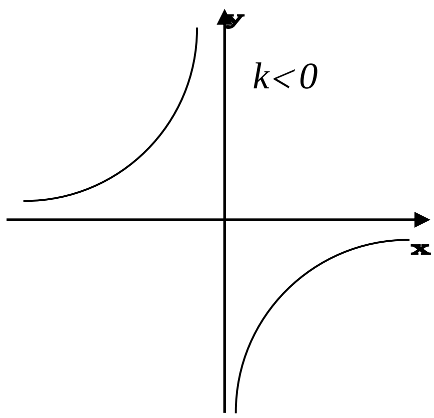


Рисунок 2

4) Если значениями переменных x и y служат положительные действительные числа, то с увеличением (уменьшением) значения переменной х в несколько раз, соответствующее значение у уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Это свойство присуще только обратной пропорциональности и им можно пользоваться при решении текстовых задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные величины.

Задание! Решите задачу разными способами «Велосипедист, двигаясь со скоростью 10 км/час, проехал расстояние от А до В за 6 ч. Сколько времени потратит велосипедист на обратный путь, если будет ехать со скоростью 20 км/час».

9.6 Линейная функция

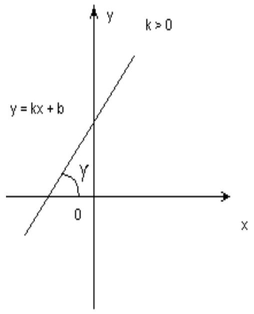
Линейной называется функция, которую можно задать при помощи формулы у = *kx+в*, где х – независимая переменная, а k и в – заданные действительные числа.

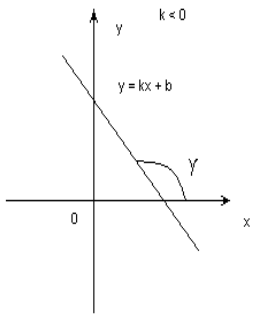
Если, в частности *k*=0, то получается функция вида *у=в* – её называют *постоянной функцией*.

Областью определения линейной функции является множество действительных чисел. Графиком линейной функции является прямая. Положение этой прямой на плоскости определяют коэффициенты *k* и *в*.

Если обозначить через γ –угол между осью *Ox* и графиком линейной функции, и измерять его против часовой стрелки, то можно заметить, что величина угла зависит от коэффициента *k*.

Если *k* > 0, то угол γ острый, если *k* < 0, то угол γ тупой.





Коэффициент *в* есть значение длины отрезка, отсекаемого прямой на оси *Oy*. При *k*>0 функция *y=k x+в* – возрастает, а при *k*<0 – убывает на всей области определения.

ТЕМА 10 «Выражения. Числовые равенства и неравенства»

Цель: сформировать у студентов понятия числового выражения, выражения с переменными, значения выражения, тождества, числового равенства и неравенства; выработать умение находить область определения выражений, значение выражения, выполнять тождественные преобразования выражений, использовать выражения при решении задач начального курса математики, устанавливать истинность числовых равенств и неравенств.

Контрольные и проблемные вопросы по теме10

1. Что входит в алфавит математического языка?
2. Из чего состоят числовые выражения? Приведите примеры.
3. Что значит «выражение не имеет смысла»?
4. Дайте строгое определение числового выражения.
5. Что называется значением числового выражения?
6. Из чего состоят выражения с переменными?
7. Какие выражения называются тождественно равными?
8. Что называется тождеством?
9. Что называется тождественным преобразованием выражения?
10. Какие тождественные преобразования рассматриваются в начальном курсе математики?
11. Что называется числовым равенством? Истинным числовым равенством?
12. Какие свойства истинных числовых равенств Вам известны?
13. Что называется числовым неравенством?
14. Какие бывают числовые неравенства?
15. Назовите свойства истинных числовых неравенств.

Задания для работы в аудитории по теме 10

<u>*Задание 1.*</u> Среди следующих записей укажите числовые выражения:

а) 42:5; г) 2·7=7·2;
б) 27; д) (17+13) : 10-15;
в) (32+ 10): 14 ; е)142> 71·2.

Задание 2. Какие из следующих выражений имеют смысл, если рассматривать их на множестве натуральных чисел

а) (135+67)· 12; б) (135–217):2; в) 362:4.

Задание 3. Установите, какова область определения выражений, если рассматривать их на множестве действительных чисел:

а) (3–y): 64; б) 64: (3–y); в) (5+x) : (x–12).

Задание 4. Вычислите значение выражения

((36:2–14)·(42·2–14)+20):2

Задание 5. Обоснуйте каждый шаг в преобразованиях:

324·5=(300+20+4) ·5= 300·5+20·5+4·5=1500+100+20=1500+120=1620.

Задание 6. Упростите выражение путем тождественных преобразований

6(2*ав*-3)+2*а*(6*в*-5)

Задание 7. Решите задачу, решение запишите в виде выражения:

«На туристическую базу в первый день прибыли 150 туристов, на другой день 170 . Чтобы пойти по маршрутам, 200 туристов разбились на группы, по 20 человек в каждой, а остальные по 15 человек в группе. Сколько получилось групп?»

Задание 8. Преобразуйте выражение и найдите его значение при x= –8, y=25

$$\frac{3x^2 - xy}{9x^2 - y^2}.$$

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 10

1. Вычислите значение выражения:

а) (72:12–(18–15)):(24:3–2·4),

б) (16,583 : 7,21+54,68·853,2+28,82· 0,1):1,6–1,02.

2. Какие из следующих равенств являются тождествами на множестве действительных чисел:

а) 3p+5m=5m+3p, в) 3p·5m=5m·3p,

б) 3p–5m=5m–3p, г) 3p:5m=5m:3p.

3. Упростите выражение путем тождественных преобразований

(12*а*–16*в*):4–(10*а*–4*в*).

4. Решите задачу, решение запишите в виде выражения: «В мастерской за 5 дней сшили 2000 фартуков. Сколько фартуков сошьют за 8 дней, если будут шить в день на 50 фартуков больше?»

5. Найдите область определения выражений:

а) $\frac{10}{(x-2)(x+1)}$; б) $\frac{8-2y}{\sqrt{2x-3}}$; в) $\frac{x+5}{x^2-1}$.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 10

10.1 Алфавит математического языка

Изучение данного понятия связано с использованием математического языка; он относится к искусственным языкам, которые создаются и развиваются с той или иной наукой. Как и любой другой, математический язык имеет свой алфавит. В него входят:

1) цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9; с их помощью по специальным правилам записываются числа,

2) знаки операций: +, –, *, : ;

3) знаки отношений: $<$, $>$, =, ⋮, ≠;

4) строчные буквы латинского алфавита, их применяют для обозначения чисел;

5) скобки (круглые, фигурные и др.), их называют техническими знаками.

Используя этот алфавит, в алгебре образуют слов, называя их выражениями, а из слов получаются предложения – числовые равенства, числовые неравенства, уравнения, неравенства с переменными.

10.2 Числовые выражения

В математике встречаются два вида математических выражений – числовые выражения и выражения с переменными. Примерами числовых выражений являются выражения 3+7; 2,5+3, 7–1. Они образуются из чисел, знаков действий и скобок. Считают, что каждое число также является числовым выражением.

Число, полученное в результате последовательного выполнения действий, указанных в выражении, называется *значением числового выражения.*

Существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти. Про такие выражения говорят, что они е имеют смысла. Например, выражение 8:(4–4) смысла не имеет, т.к. его значения найти нельзя, 4–4=0, а деление на нуль невозможно.

Если f и g– числовые выражения, то $(f)+(g)$, $(f)-(g)$, $(f)\cdot(g)$, $(f):(g)$– числовые выражения. Считают, что каждое число является числовым выражением.

Условились сначала выполнять действия второй ступени (умножение и деление), а затем действия первой ступни (сложение и вычитание).

В начальных классах учащиеся первоначально знакомятся с записями вида 2+3, 7–4, называя их соответственно суммой и разностью. Затем появляются числовые выражения и более сложной структуры, но термины «математическое выражение» и «значение выражения» появляются, когда учащиеся производят вычисления в пределах сотни.

10.3. Выражения с переменными

Выражения вида 2x+1, $3x^2+x$, $2^x+0,5x$ называют выражениями с переменной x. Они образованы из чисел, знаков действий и букв. Выражение может содержать и несколько переменных.

Если в выражение с переменными подставить вместо переменных конкретные числа, то получим числовое выражение. После выполнения всех действий с числами получится число, которое называют значением выражения с переменными при выбранных значениях переменных.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, т. е. выполнимы все указанные действия, называются *допустимыми значениями* переменных или областью определения выражения.

Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называют *соответственными значениями* выражений.

Переменную в математике обозначают любой строчной буквой латинского алфавита. В начальной школе для обозначения переменной кроме букв используются другие знаки, например □. Тогда запись выражения с переменной имеет вид: 2· □+3.

В начальной школе работа с буквенными выражениями сводится к подстановке вместо букв их значений и вычислению значения получившегося числового выражения.

10.4 Тождественные преобразования выражений

Два выражения называют *тождественно равными,* если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны.

Например, *5(x+2)* и *5x+10* – тождественно равные выражения.

Если два тождественно равных на некотором множестве выражения соединить знаком равенства, то получим предложение, которое называется *тождеством* на этом множестве.

Тождествами считают и верные числовые равенства.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве, называют *тождественным преобразованием данного выражения* на этом множестве.

В начальном курсе математики выполняют, как правило, только тождественные преобразования числовых выражений. Теоретической основой таких преобразований являются свойства сложения и умножения, различные правила: прибавления суммы к числу, числа к сумме, вычитания числа из суммы и др.

10.5 Числовые равенства и неравенства

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком равенства. Получим предложение $f = g$, которое называют *числовым равенством*.

Возьмем, например, числовые выражения 3+2 и 6–1 и соединим их знаком равенства 3+2=6 –1. Оно истинное. Если же соединить знаком равенства 3+2 и 7–3, то получим ложное числовое равенство. Таким образом, с логической точки зрения числовое равенство – это высказывание, истинное или ложное.

Числовое равенство истинно, если значения числовых выражений, стоящих в левой и правой частях равенства, совпадают.

Свойства истинных числовых равенств:

1) Если к обеим частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.
2) Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое равенство.

Пусть f и g – два числовых выражения. Соединим их знаком «<» (или «>»). Получим предложение $f< g$ (или $f > g$), которое называют *числовым неравенством*.

С логической точки зрения числовое неравенство – это высказывание, истинное или ложное.

Свойства числовых неравенств:

1. Если к обеим частям истинного числового неравенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим также истинное числовое неравенство.
2. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и положительное значение, то получим также истинное числовое неравенство.
3. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее смысл и отрицательное значение, а также поменяем знак неравенства на противоположный, то получим также истинное числовое неравенство.

Тема 11 «Уравнения и неравенства с одной переменной»

Цель: сформировать у студентов понятия уравнения с одной переменной, корня уравнения, решения уравнения, равносильности уравнений, неравенства с одной переменной, решение неравенства, равносильности неравенств; выработать умения; выработать умение решать уравнения и неравенства.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 11

1. Что называется уравнением с одной переменной?
2. Что такое корень уравнения?
3. Сколько корней может иметь уравнение?
4. Что значит решить уравнение?
5. Какие уравнения называются равносильными?
6. Как можно получить равносильные уравнения?
7. Какова особенность решения уравнений в начальном курсе математики?
8. Что называется неравенством с одной переменной?
9. Что является решением неравенства?
10. Что значит решить неравенство?
11. Какие неравенства называются равносильными на множестве?
12. Как можно получить равносильные неравенства?

Задания для работы в аудитории по теме 11

Задание 1. Установите, какие из следующих записей являются уравнениями с одной переменной:

а) $(x – 3) \cdot 5 = 12x$; г) $3 + (12 – 7) \cdot 5 = 16$;
б) $(x – 3) \cdot 5 = 12$; д) $(x – 3) \cdot y = 12x$;
в) $(x – 3) \cdot 17 + 12$; е) $x^2 – 2x + 5 = 0$.

Задание 2. Уравнение $2x^4 + 4x^2 – 6 = 0$ задано на множестве натуральных чисел. Объясните, почему число 1 является корнем этого уравнения, а 2 и –1 не являются его корнями.

Задание 3. В уравнении (x+. . .)(2x+5)–(x–3)(2x+1)=20 одно число стерто и заменено точками. Найдите стертое число, если известно, что корнем этого уравнения является число 2.

Задание 4. Установите, какие из следующих пар уравнений равносильны на множестве действительных чисел.

а) $3+7x=-4$ и $2(3+7x)=-8$,
б) $3+7x=-4$ и $6+7x=-1$,
в) $3+7x=-4$ и $x+2=0$.

Задание 5. Решите уравнение и обоснуйте все преобразования, выполняемые в процессе их упрощения:

$$\frac{7x+4}{2}-x=\frac{3x-5}{2}\ .$$

Задание 6. Решите уравнение:

$$\frac{2}{2-x}-\frac{1}{2}=\frac{4}{(2-x)x}\ ;\ x\in\mathbf{R}\ .$$

Является ли число 2 корнем этого уравнения?

Задание 7. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

а) $(x+70)\cdot 4=328$; б) $560:(x+9)=56$.

Задание 8. Решите задачу, составив уравнение:
«На первой полке на 16 книг больше, чем на второй. Если с каждой полки снять по 3 книги, то на первой полке книг будет в 1,5 раза больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?»

Задание 9. Установите, какие из следующих записей являются неравенствами с одной переменной:

а) $-12-7x<3x+8$, г) $12x+3(x-2)$,
б) $15(x+2)>4$, д) $17-12\cdot 8$,
в) $17(13+8)<14-9$, е) $2x^2+3x-4>0$.

Задание 10. Является ли число 3 решением неравенства:

$6(2x+7)<15(x+2)$, $x\in\mathbf{R}$? А число 4,25?

Задание 11. Равносильны ли на множестве действительных чисел следующие пары неравенств:

а) $-17x<51$ и $3>x$, б) $\frac{3x-1}{4}>0$ и $3x-1>0$, в) $6-5x>-4$ и $x<2$.

Задание 12. Решите неравенство:
$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2$

Задание 13. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая – 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 см.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 11

1. Решите уравнения и обоснуйте все преобразования:

а) $x-\frac{3x-2}{5}=3-\frac{2x-5}{3}$; б) $(2-x)\cdot 2-x(x+1{,}5)=4$.

2. Решите уравнения, используя взаимосвязь между компонентами и результатами действий:

$(85x+765):170=98$.

3. Решите задачу, составив уравнение: «Весь путь от туристической базы до станции, равный 26 км, велосипедист проехал за 1 час 10 минут. Первые 40 минут этого времени он ехал с одной скоростью, а остальное время – со скоростью на 3 км/ч меньше. Найдите скорость велосипедиста на первом участке пути».

4. Какие из следующих высказываний истинные:

а) $-7x < -28 \Rightarrow x > 4$, б) $x < 6 \Rightarrow x < 5$, в) $x < 6 \Rightarrow x < 20$.

5. Докажите, что решением неравенства $2(x+1)+5>3-(1-2x)$ является любое действительное число.

6. Докажите, что не существует действительного числа, которое являлось бы решением неравенства $3(2-x)-2>5-3x$.

7. Решите неравенство, множество решений отметьте на числовой оси.

$$\frac{1{,}3-3x}{2}+\frac{5x-0{,}4}{0{,}3}\leq\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}$$

8. Одна сторона треугольника равна 5 см, а другая – 8 см. Какой может быть длина третьей стороны, если периметр треугольника больше 17 см?

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 11

11.1 Уравнения с одной переменной

Пусть *f(x)* и *g*(*x*) – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда высказывательная форма вида *f(x) = g(x)* называется *уравнением с одной переменной.*

Значение переменной x из множества X, при котором уравнение обращается в истинное числовое равенство, называется *корнем уравнения* (или его решением). *Решить уравнение* – это значит найти множество его корней.

Уравнение может содержать один корень, два корня, множество корней, а может не иметь корней.

Чтобы решить какое-либо уравнение, его сначала преобразовывают, заменяя другим, более простым; полученное уравнение опять преобразовывают, заменяя более простым, и т. д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получают уравнение, корни которого можно найти известным способом. Но чтобы эти корни были корнями заданного уравнения, необходимо, чтобы в процессе преобразований получились уравнения, множества корней которых совпадают.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ *и* $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными,* если множества их корней совпадают.

Замена уравнения равносильным ему уравнением называется *равносильным преобразованием*.

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения с областью определения X прибавить одно и то же выражение с переменной, определенное на том же множестве, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые используются при решении уравнений:
1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
2. Если какое-либо слагаемое (числовое выражение илu выражение с переменной) перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. Если обе части уравнения с областью определения X умножить на одно и то же выражение, которое определено на том же множестве и не обращается на нем в нуль, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

В начальном курсе математики теоретической основой решения уравнений является взаимосвязь между компонентами и результатами действий.

11.2 Неравенства с одной переменной

Предложения $2x+7>10-x$, $x^2+7x<2$, $(x+2)(2x-3)>0$ называют неравенствами с одной переменной.

Пусть *f(x)* и *g(x)* – два выражения с переменной *x* и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x)>g(x)$ или $f(x)<g(x)$ называется *неравенством с одной переменной*. Множество X называется *областью его определения.*

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его *решением*. *Решить неравенство* – это значит найти множество его решений.

Так, решением неравенства $2x+7>10-x$, $x\in\mathbf{R}$ является число $x=5$, так как $2\cdot5+7>10-5$ – истинное числовое неравенство. А множество его решений – это промежуток $(1,\infty)$, который находят, выполняя преобразование неравенства: $2x+7>10-x$ => $3x>3$ => $x>1$.
В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называются *равносильными,* если их множества решений равны.

Теорема 3. Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)+h(x)>g(x)+h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекают следствия, которые часто используются при решении неравенств:

1) Если к обеим частям неравенства $f(x)>g(x)$ прибавить одно и то же число d, то получим неравенство $f(x) + d > g(x) + d$, равносильное исходному.

2) Если какое-либо слагаемое (числовое выражение или выражение с переменной) перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 4. Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x из множества X выражение $h(x)$ принимает положительные значения. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x)>g(x)$ умножить на одно и то же положительное число d, то получим неравенство $f(x)\cdot d>g(x)\cdot d$, равносильное данному.

Теорема 5. Пусть неравенство $f(x)>g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ – выражение, определенное на том же множестве, и для всех x их множества X выражение $h(x)$ принимает отрицательные значения. Тогда неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x)$ равносильны на множестве X.

Из этой теоремы вытекает следствие: если обе части неравенства $f(x)>g(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число d и знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f(x)\cdot d < g(x)\cdot d$, равносильное данному.

Тестовые задания по разделу 3

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Какая из следующих формул не задает на множестве действительных чисел функцию?	1) $y=-5x$; 2) $y=\frac{4}{x}$; 3) $x^2+y^2=25$; 4) $y=3-2x$.
2	Обратной пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы:	1) $y=kx+в$; 2) $y=kx$; 3) $y=\frac{k}{x}$; 4) $y=x^2$.
3	В каких координатных четвертях расположен график функции $y=-\frac{3}{x}$	1) I и II; 2) I и III; 3) I и IV; 4) II и IV.
4	Найдите координату y точки пересечения с осью ординат графика функции $y=5x-\frac{1}{3}$	1) $\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{15}$; 4) $-\frac{1}{3}$.
5	Значение выражения 24:3·2+2°=…	1) 17; 2) 13; 3) 16; 4) 12
6	Вычислите $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3$	1) $\sqrt{3}+\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$;

		3) $\frac{5}{8}$; 4)1
7	Произведение корней уравнения $x^2 – x – 6 = 0$ равно…	1) 0; 2) 6; 3) 28; 4) -6.
8	Свойство «с увеличением (уменьшением) значения переменной *x* в несколько раз, соответствующее значение *y* увеличивается (уменьшается) во столько же раз» характерно для	1) прямой пропорциональности; 2) обратной пропорциональности; 3) линейной функции; 4) квадратичной функции.
9	Графиком какой функции является гипербола?	1) $y=7x$; 2) $y = \frac{12}{x}$; 3) $y= 3 – 2x$; 4) $y=2$
10	Неравенство $2x + 7 > 10 – x$, $x \in \mathbf{R}$ имеет следующее множество решений:	1) (17; ∞); 2) (3; ∞); 3) (–∞; 1); 4) (1, ∞).

РАЗДЕЛ 4
ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ
(МАТЕМАТИЧЕСКИЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ИХ СТРУКТУРА)»

Тема 12 «Математические понятия»

Цель: сформировать у студентов понятие объема и содержания понятия, существенных и несущественных свойств объекта, определения и основных составляющих элементов определения, требования к определению понятий, выработать умения определять отношения между понятиями, формулировать определение через род и видовое отличие с учетом правил, формулировать определения различными способами.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 12

1. Какие различают свойства объектов?
2. Какие свойства называют существенными, а какие – несущественными?
3. Что называется объемом понятия?
4. Что такое содержание понятия?
5. Какие отношения между понятиями вам известны?
6. В каком случае понятие является видовым по отношению к другому понятию?
7. В каком случае понятие является родовым по отношению к другому понятию?
8. Как вы понимаете отношение части и целого между понятиями?
9. Что называется определением понятия?
10. Какие Вы знаете определения (примеры)?
11. Какие составные части можно выделить в определении, сформулированном в явном виде?
12. Какова схема определения понятия через род и видовое отличие?
13. Какие существуют требования к определению понятий?
14. Каким образом чаще всего формулируются определения в начальном курсе математики?

Задания для работы в аудитории по теме 12

Задача № 1 Начертите три геометрические фигуры, принадлежащие объему понятия:
а) параллелограмм, б) трапеция, в) окружность.

Задача № 2. Назовите пять существенных свойств понятия:
а) треугольник; б) круг.

Задача № 3 Каков объём понятия:
а) однозначное число; б) натуральное число; в) луч.

Задача № 4. Назовите несколько свойств, общих для прямоугольника и квадрата. Какое из следующих утверждений верно:
а) всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику;
б) всякое свойство прямоугольника присуще квадрату.

Задача № 5. Находятся ли в отношении рода и вида следующие пары понятий:
а) многоугольник и треугольник; б) угол и острый угол;
в) ромб и квадрат; г) круг и окружность.

Задача № 6. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между объёмами понятий *а, в* и *с*, если:
1) *а* – «четырёхугольник», *в* – «трапеция», *с* – «прямоугольник»;
2) *а* – «натуральное число, кратное 3», *в* – «натуральное число, кратное 4», *с* – «натуральное число».

Задача № 7. Среди понятий, изучаемых в начальном курсе математики, есть такие, как «чётное число», «треугольник», «многоугольник», «число», «трёхзначное число», «прямой угол», «сумма», «слагаемое», «выражение». Есть ли среди них понятия, находящиеся в отношении:

а) рода и вида; б) целого и части.

Задача № 8. Переформулируйте следующие определения, используя слова «тогда и только тогда, когда»:

а) чётным называется число, которое делится на 2;

б) множества А и В называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Задача № 9. В следующих определениях выделите определяемое и определяющее понятия, родовое понятие и видовое отличие:

а) параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны;

б) отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией.

Задача № 10. Соразмерно ли следующее определение: «Остроугольным треугольником называется треугольник, у которого есть острый угол».

Задача № 11. Учащийся определяет прямой угол как угол, стороны которого взаимно перпендикулярны, а взаимно перпендикулярные прямые как прямые, образующие при пересечении прямые углы. Какую ошибку допустил учащийся?

Задача № 12. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если можете, исправьте их:

а) прямоугольником называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны;

б) биссектрисой угла называется прямая, делящая угол пополам.

Задача № 13. Дайте определение тупоугольного треугольника, равнобедренного треугольника, трапеции. Какие понятия Вы выбрали в качестве родового в каждом случае? Какие свойства включили в видовое отличие?

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 12

1. Какие из приведенных ниже свойств трапеции являются существенными, а какие несущественными:
   а) две стороны трапеции параллельны;
   б) основания трапеции горизонтальные;
   в) оба угла при большем основании острые;
   г) оба угла при меньшем основании тупые;
   д) сумма внутренних углов трапеции равна 360°.

2. Верно ли, что объем понятия «прямоугольник» больше, чем объем понятия «квадрат»? Какая взаимосвязь существует между содержанием этих понятий?

3. Среди следующих свойств выделите те, которыми обладает квадрат:
   а) диагонали делят друг друга в точке пересечения пополам;
   б) диагонали делят углы пополам.

5. Какими свойствами из названных в предыдущей задаче обладает:
   а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб.

6. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между объёмами понятий *а, в* и *с*, если: *а* – «треугольник», *в* – «равнобедренный треугольник», *с* – «равносторонний треугольник».

7. Соразмерно ли следующее определение: «Прямоугольным треугольником называется треугольник, у которого есть прямой угол»?

8. Есть ли логические ошибки в следующих определениях? Если можете, исправьте их:

а) сложением называется действие, при котором числа складываются;
б) равносторонним треугольником называется треугольник, у которого равны все стороны и все углы;
в) параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

9. Сформулируйте определение прямоугольника, используя в качестве родового понятие «четырехугольник».

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 12

12.1 Математические понятия. Объем и содержание понятий

Понятия, которые изучаются в начальном курсе математике можно представить в виде 4 групп:

1. Понятия, связанные с числами и операциями над ними (число, сложение, слагаемое, больше и т. д.);
2. Алгебраические понятия (выражение, равенство, уравнение и т. д.);
3. Геометрические понятия (прямая, отрезок, квадрат и т. д.);
4. Понятия, связанные с величинами и их измерением (длина, объем, площадь, периметр, масса, время, путь и др.)

Учителю надо иметь представления о понятии как логической категории и особенностях математических понятий.

В логике понятия рассматривают как форму мысли, отражающую объекты (предметы или явления) в их существенных и общих свойствах. Языковой формой понятия является слово или группа слов.

Составить понятия об объекте – это значит уметь отличить его от других сходных с ним объектов.

Понятие есть результат выделения и обобщения предметов или явлений некоторого класса по их существенным и отличительным признакам.

Математические понятия обладают такой главной особенностью, что они в реальности не существуют. Математические объекты созданы умом человека. Это идеальные объекты, отражающие реальные предметы или явления. Результатом абстрагирования являются понятия «число», «величина» и др.

Всякий математический объект обладает определенными свойствами. Например, квадрат имеет четыре стороны, четыре прямых угла, равные диагонали и др.). Среди свойств объекта различают существенные и несущественные.

Свойство считают *существенным* для объекта, если оно присуще ему и без него он не может существовать.

Объем понятия – это множество всех объектов, обозначаемых одним термином.

Содержание понятия – это множество всех существенных свойств объекта, отраженных в этом понятии.

Например, объемом понятия «прямоугольник» выступает множество различных прямоугольников, а в его содержание входят такие свойства, как «иметь четыре прямых угла», «иметь равные противоположные стороны», «иметь равные диагонали» и т. д.

Между объемом понятия и его содержанием существует взаимосвязь: если увеличивается объем понятия, то уменьшается его содержание, и наоборот. Например, объем понятия «квадрат» является частью объема понятия «прямоугольник», а в содержании понятия «квадрат» содержится больше свойств, чем в содержании понятия «прямоугольник».

12.2 Отношения между понятиями. Определение понятий

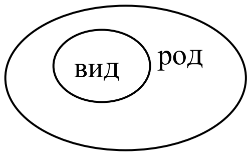
Условимся понятия обозначать строчными буквами латинского алфавита: *а, в, с, …, z*.

Пусть заданы два понятия *а* и *в.* Обозначим их объёмы соответственно большими буквами А и В.

Если $A \subset B$ ($A \neq B$), то говорят, что понятие *а – видовое по отношению к понятию* ***в***, а понятие *в – родовое по отношению к понятию а*.

Пример: *а* – «прямоугольник»; *в* – «четырёхугольник». Объёмы А и В находятся в отношении включения ($A \subset B$ и $A \neq B$). Поэтому понятие «прямоугольник» – видовое по отношению к понятию «четырёхугольник» , а понятие «четырёхугольник» – родовое по отношению к понятию «прямоугольник».

На диаграммах Эйлера-Венна родовые и видовые понятия изображаются как множества и подмножества.



Если А=В, говорят, что понятия *а* и *в тождественны*. Например, «равносторонний треугольник» и «равноугольный треугольник».

Существует еще *отношение части и целого*. Например, «прямая» и «отрезок». Отрезок – это часть прямой, но не её вид.

Не всегда объем одного понятия входит в объем другого понятия и даже пересекается с ним. Бывают *несовместимые* понятия или противоположные понятия. Например, «часть речи» и «знак препинания», «положительное число» и «отрицательное число».

Определением называют предложение, разъясняющие суть нового термина (или обозначения).

Делается это на основе раннее введённых понятий. Например, «прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы прямые». В этом определении есть две части – определяемое понятие (прямоугольник) и определяющее понятие (четырёхугольник, у которого все углы прямые).

Определения, имеющие такую структуру, называются *явными*.

В определяющем понятии прямоугольника можно выделить:

1) понятие «четырёхугольник», которое является родовым по отношению к понятию «прямоугольник»;

2) свойство «иметь все углы прямые», которое позволяет выделить из различных четырёхугольников один вид – прямоугольники; поэтому его называют *видовым отличием*.

Видовое отличие – это свойство (одно или несколько), которое позволяют выделять определяемые объекты из объёма родового понятия.

Таким образом, можно представить следующую схему.

Определяемое понятие	=	***Родовое понятие***	+	***Видовое отличие***

Определяющее понятие

Кроме определений понятий через род и видовое отличие, в математике используются так называемые *аксиоматические определения*. Это неявные определения, так как они прямо не называют класс объектов, которые они описывают. Например, понятие множества, точки, прямой, плоскости. В математике встречаются определения понятий через *противоположность*. Например, понятие «неравно» – понятие противоположное понятию равенства. Кроме того, в математике встречаются определения *через абстракцию*. Например, понятие «число 5» можно определить как специфическое общее свойство всех множеств, равномощных с множеством пальцев определенной руки. Это понятие есть свойство, оторванное от конкретных объектов.

12.3 Правила определения понятий

Формулируя определения, придерживаются ряда правил:

1. Определение должно быть *соразмерным*.

Это означает, что объемы определяемого и определяющего понятий должны совпадать. Например, несоразмерно такое определение квадрата: «Квадратом называется четырехугольник, у которого все стороны равны». Объем определяемого понятия – это множество квадратов, а объем определяющего понятия – множество четырехугольников, у которых все стороны равны, а это множество ромбов. Не всякий ромб есть квадрат.

2. В определении (или в их системе) не должно быть *порочного круга.*

Это означает, что нельзя определить понятие через само себя (в определяющем понятии не должно содержаться определяемого термина) или определять его через другое, которое, в свою очередь, определять через него. Например, содержит порочный круг определение: «Равные треугольники – это треугольники, которые равны».

3. Определение должно быть ясным.

Это значит, что, прежде всего, требуется, чтобы значения терминов, входящих в определяющее понятие, были известны к моменту введения определения нового понятия. Например, нельзя определять прямоугольник как параллелограмм с прямым углом, если понятие «параллелограмм» еще не рассмотрено.

К условиям ясности определения относят рекомендацию включать в видовое отличие лишь столько свойств, сколько необходимо и достаточно для выделения определенных объектов из объема родового понятия.

Для обеспечения ясности определения важно также наличие понятия, родового по отношению к определяемому. Пропуск родового понятия делает определение несоразмерным. Например, «Квадрат – это когда все стороны равны».

Формулируя определение надо стремится в определяющем указывать не просто родовое по отношению к определяемому понятие, а ближайшее. Это позволяет сократить количество свойств, включаемых в видовое отличие.

4. Одно и тоже понятие определить через род и видовое отличие можно по-разному.

Так, квадрат можно определить как:

- прямоугольник, у которого соседние стороны равны;
- прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны;
- ромб, у которого есть прямой угол;
- параллелограмм, у которого все стороны равны, а углы прямые.

При изучении математики в начальных классах определения через род и видовое отличие используются редко. Связано это как с особенностями курса, так и с возможностями детей. Но понятий в начальном курсе математики очень много.

Чаще всего используют так называемые *неявные* определения. В их структуре нельзя выделить определяемое и определяющее понятия. Среди них различают контекстуальные и остенсивные.

Тема 13 «Математические предложения»

Цель: сформировать у студентов понятия высказывания и высказывательной формы, логической структуры предложения, конъюнкции, дизъюнкции, отрицания математических предложений, логического следования и равносильности между двумя предложениями, понятие теоремы и ее структуры; выработать умения различать среди различных предложений высказывания и высказывательные формы, находить множество истинности высказывательных форм, определять логическую структуру предложений; определять значения истинности конъюнкции, дизъюнкции и отрицания высказываний и высказывательных форм, устанавливать наличие следования и равносильности между высказываниями, формулировать обратную, противоположную и обратную противоположной теоремы.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 13

1. Что называется высказыванием? Какие значения могут принимать высказывания?
2. Что называется высказывательной формой?
3. В чем отличие между высказывательной формой и высказыванием?
4. Что называется множеством истинности высказывательной формы?
5. Какие логические связки вам известны?
6. Какие предложения называются составными?
7. Какова структура составного предложения?
8. Что называется конъюнкцией двух высказываний? Какова таблица истинности для конъюнкции высказываний?
9. Что называется дизъюнкцией двух высказываний? Какова таблица истинности для дизъюнкции высказываний?
10. Как найти множество истинности конъюнкции (дизъюнкции) двух высказывательных форм?
11. Что называется квантором общности? Как можно записать и прочитать высказывание с квантором общности?
12. Что называется квантором существования? Как записать и прочитать высказывание

с квантором существования?

13. Каким образом устанавливается истинность высказывания с квантором общности? С квантором существования?

14. Как установить ложность высказывания с квантором общности? С квантором существования?

15. Что называется отрицанием высказывания? Какова таблица истинности для отрицания?

16. Как построить отрицание элементарного высказывания?

17. Что представляют собой законы де Моргана? Как построить отрицание конъюнкции и дизъюнкции двух высказываний?

18. Каким образом можно построить отрицание высказывания с квантором?

19. Дайте определение логического следования. Каким символом оно обозначается?

20. Какова таблица истинности для импликации?

21. Как можно прочитать предложение, содержащее в своей структуре знак логического следования?

22. Что называется отношением равносильности между предложениями? Каким символом оно обозначается?

23. Как выглядит таблица истинности для эквиваленции?

24. Прочитайте различными способами предложение, содержащее в своей структуре знак равносильности.

25. Что называется теоремой? Какова ее структура?

26. Какова структура обратного утверждения? Всегда ли это утверждение является теоремой?

27. Какова структура противоположного утверждения? Всегда ли это утверждение является теоремой?

28. Какую структуру имеет обратное противоположному утверждение? Является ли оно теоремой?

29. О чем гласит закон контрапозиции?

Задания для работы в аудитории по теме 13

Задача № 1. Среди следующих предложений укажите высказывания и определите их значение истинности:

а) $(12-7)(6+3)=45$;
б) $(15+12):3>10$;
в) в любом прямоугольнике противоположные стороны равны;
г) $4(12-x)=24$;
д) среди четырёхугольников есть такие, у которых все стороны равны;
е) число z – двузначное;
ж) произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18396 и 14174;
з) число 6 является корнем уравнения: $4(12-x)=24$.

Задача № 2. Какие из предложений задачи 1 являются высказывательными формами? Подставьте в них значение переменной так, чтобы получилось:

а) истинное высказывание, б) ложное высказывание.

Задача № 3. Найдите множество истинности высказывательной формы $2x-10<0$, заданной на множестве X, если:

а) X =$\mathbf{R}$; б) X =$\mathbf{N}$.

Задача № 4. Изобразите на координатной прямой множество истинности каждого из предложений при условии, что все они заданы на множестве $\mathbf{R}$:

а) $x>2$; б) $2<x<6$.

Задача № 5. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предложений при условии, что $x, y\in\mathbf{R}$.

а) $x=y$; б) $x=2$; в) $y=2x+3$.

Задача № 6. В следующих составных предложениях выделите составляющие их элементарные предложения и логические связки:

а) В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса BD является медианой и высотой;

б) $x \geq 7$;

в) Если запись числа оканчивается цифрой 0, то число делится на 5;

г) Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все углы равны;

д) Неверно, что число 17 делится на 3;

е) если $a \cdot в = 0$, то $a = 0$, или $в = 0$.

Задача № 7. Какова логическая структура (форма) следующего предложения: «Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине».

Задача № 8. Известно, что высказывание А истинно. Можно ли, зная это, определить значение истинности высказывания:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$.

Задача № 9. Определите значение истинности каждого высказывания:

а) число 6 делится на 2 и 3;

б) число 123 делится на 3 и на 9;

в) при делении 42 на 5 в остатке получится 2 или 5;

г) треугольник ABC – прямоугольный и равносторонний;

д) $3 \leq 7$;

е) $3 \geq 7$.

Задача № 10. Замените предложение конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл «Число 7 принадлежит хотя бы одному из множеств A и B».

Задача № 11. A – множество четных натуральных чисел, B – множество натуральных чисел, меньших 20. Установите, какие из следующих высказываний истинны:

а) $5 \in A$ или $5 \in B$; б) $5 \in A$ и $5 \in B$.

Задача № 12. Вместо многоточия вставьте «и» либо «или»:

а) $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда $x \in A \ldots x \in B$;

б) $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда $x \in A \ldots x \in B$.

Задача № 13. В высказывании «всякий прямоугольник является четырехугольником» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив слово «всякий» его синонимом.

Задача № 14. Прочтите записи, заменив символические обозначения кванторов общности и существования их словесными выражениями:

а) $(\forall x \in \mathbf{R})\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; б) $(\forall y \in \mathbf{R})\ 5 + y = 5$;

в) $(\forall y \in \mathbf{R})\ y + 3 > 0$; г) $(\forall x \in \mathbf{N})\ x + 3 < 0$.

Задача № 15. Запишите следующие предложения, используя символические обозначения кванторов:

а) существует такое натуральное число x, что $x+5=9$;

б) каково бы ни было число x, $x+0=x$;

в) уравнение $ax^2+вx+c=0$ имеет хотя бы один корень.

Задача № 16. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:

а) всякое число, умноженное на нуль, есть нуль;

б) произведение любого числа и единицы равно этому числу.

Задача № 17. Установите, какие из высказываний истинны, а какие ложны:

а) во всяком четырехугольнике диагонали равны;

б) существуют числовые выражения, значения которых нельзя найти.

Задача № 18. Докажите или опровергните следующие высказывания:
а) существуют уравнения, множество решений которых пусто;
б) всякое целое число является натуральным.

Задача № 19. Выясните, какие из высказываний, взятых из учебников математики для начальных классов, содержат квантор и как следует устанавливать их значение истинности (указать только способ и обосновать его выбор):
а) от перестановки слагаемых сумма не изменится;
б) площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину;
в) существуют четные числа;
г) некоторые числа делятся на 4;
д) среди многоугольников есть треугольники.

Задача № 20. Сформулируйте отрицание следующих предложений:
а) число 123 делится на 9;
б) при делении числа 32 на 5 в остатке получится 7;
в) треугольник АВС – прямоугольный.

Задача № 21. Сформулируйте, используя законы де Моргана, отрицание утверждения: «Четырехугольник АВСД – прямоугольник или параллелограмм».

Задача № 22. Какие из предложений являются отрицанием высказывания «Все натуральные числа кратны 5»?

Задача № 23. Постройте двумя способами отрицание высказывания «Некоторые простые числа являются четными».

Задача № 24. Определите, являются ли данные предложения отрицаниями друг друга, или нет:
а) число 12 – четное. Число 12 – нечетное;
б) все простые числа нечетны. Все простые числа четны;
в) все простые числа нечетны. Существуют четные простые числа;
г) некоторые углы острые. Некоторые углы тупые.

Задача № 25. Переформулируйте предложения так, чтобы они не содержали слов «неверно, что», но имели тот же смысл:
а) неверно, что число 9 – четное или простое;
б) неверно, что треугольник АВС – равнобедренный и прямоугольный.

Задача № 26. Следует ли предложение В(x) – «число x чётное» из предложения А(x), если:
а) А (x) – «число x делится на 6»;
б) А (x) – «число x делится на 7»;
в) А (x) – «число x делится на 2».

Задача № 27. Установите, находятся ли данные пары предложений в отношении следования:
а) треугольник АВС – равносторонний; треугольник АВС – равнобедренный;
б) четырёхугольник АВСД – квадрат; четырёхугольник АВСД – ромб.

Задача № 28. Данное предложение переформулируйте, используя различные способы прочтения утверждения А(x)$\Rightarrow$В(x): «всякий квадрат является прямоугольником».

Задача № 29. Определите значение истинности высказывания:
а) если запись числа оканчивается цифрой 6, то число делится на 2;
б) для того, чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы его запись оканчивалась нулем.

Задача № 30. Равносильны ли следующие предложения А(x) и В(x), если:

а) А(x) – «число делится на 9», В(x) – «сумма цифр в записи числа делится на 9»;
б) А(x) – «каждое слагаемое суммы делится на 4», В(x) – «сумма делится на 4».

Задача № 31. Докажите, что предложения «в прямоугольнике F диагонали взаимно перпендикулярны» и «прямоугольник F – квадрат» равносильны. Утверждения о равносильности сформулируйте 3-мя различными способами.

Задача № 32. Вставьте слова «и» либо «или» так, чтобы следующие высказывания были истинными:
а) $a \cdot в = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ldots в = 0$;
б) $a \cdot в \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \ldots в \neq 0$.

Задача № 33. Выделите условие и заключение в теореме:
а) если углы смежные, то их сумма равна 180^0;
б) диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Задача № 34. Сформулируйте предложения, обратные следующим теоремам:
а) если четырёхугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны;
б) если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

Задача № 35. Сформулируйте предложения, противоположные теоремам в задаче 34. Какие из них теоремы?

Задача № 36. Для каждой теоремы из задачи 34 сформулируйте теорему, равносильную ей согласно закона контрапозиции.

Задача № 37. Для теоремы сформулируйте обратное, противоположное и обратно противоположное утверждения «Если прямоугольник является квадратом, то его диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы пополам».

Задача № 38. Пользуясь законом контрапозиции, докажите теорему «Если $p \cdot q$ – нечётное число, то p и q нечётны ($p, q \in \mathbf{N}$)».

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 13

1. Найдите множество истинности высказывательной формы $2x–10<0$, заданной на множестве X, если X={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

2. Изобразите на координатной прямой множество истинности каждого из предложений при условии, что все они заданы на множестве **R**:
а) $x \leq 3$; б) $2 \leq x < 6$; в) $2 < x \leq 6$; г) $2 \leq x \leq 6$.

3. Изобразите на координатной плоскости множества истинности следующих предложений при условии, что $x, y \in \mathbf{R}$.
а) $y = 2x$; б) $y = 2$; в) $y = 2x – 3$.

4. Какова логическая структура (форма) следующих предложений:
а) Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6;
б) Треугольник ABC не является равносторонним.

5. Приведите примеры математических предложений, имеющих логическую структуру вида
а) А и В, б) А или В, в) если А, то В.

6. Известно, что высказывание А – ложно. Можно ли, зная лишь это, определить значение истинности высказывания:
а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$.

7. Каждое из следующих предложений замените конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:

а) каждое слагаемое суммы $x+y+z$ делится на 3;

б) по крайней мере одно из натуральных чисел n, $n–1$, $n+1$ четно.

8. А – множество четных натуральных чисел, В – множество натуральных чисел, меньших 20. Установите, какие из следующих высказываний истинны:

а) $8 \in A$ или $8 \in B$; б) $8 \in A$ и $8 \in B$;

в) $44 \in A$ или $44 \in B$; г) $44 \in A$ и $44 \in B$.

9. В высказывании «хотя бы одно из чисел первого десятка составное» выделите квантор и высказывательную форму. Переформулируйте данное высказывание, заменив квантор его синонимом.

10. Запишите, используя символы, следующие высказывания и определите их значения истинности:

а) при делении нуля на любое другое число получается нуль;

б) квадрат любого числа неотрицателен.

11. Установите, какие из высказываний истинны, а какие ложны:

а) при делении на 5 некоторых натуральных чисел в остатке получается 7;

б) любое однозначное число является решением неравенства $x+2>1$.

12. Докажите или опровергните следующие высказывания:

а) сумма любых двух четных чисел есть число четное;

б) хотя бы одно натуральное число является решением уравнения $7: x=2$.

13. Сформулируйте, используя законы де Моргана, отрицание утверждения: «Число 12 – четное и делится на 3».

14. Постройте двумя способами отрицание высказывания «Всякое свойство квадрата присуще прямоугольнику».

15. Переформулируйте предложения так, чтобы они не содержали слов «неверно, что», но имели тот же смысл:

а) неверно, что каждый четырехугольник является прямоугольником;

б) неверно, что хотя бы в одном прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.

16. Постройте отрицание следующих высказываний и выясните, что истинно – данное высказывание или его отрицание:

а) произведение чисел 4070 и 8 меньше, чем сумма чисел 18396 и 14174;

б) среди различных прямоугольников есть такие, площади которых равны.

17. Установите, находятся ли данные пары предложений в отношении следования:

а) $x \vdots 3$ и $x \vdots 6$; б) $a >2$ и $a >5$.

18. Сформулируйте следующие высказывания в виде «если …, то …»:

а) А – достаточное условие для В;

б) А – необходимое условие для В;

в) В – достаточное условие для А;

г) В – необходимое условие для А.

19. Среди следующих предложений укажите истинные; ответы обоснуйте:

а) число a – натуральное, следовательно, и $15a$ – натуральное число;

б) число $15a$ – натуральное, следовательно, a – натуральное число;

в) если в четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник;

г) если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

20. Вставьте слова «и» либо «или» так, чтобы следующие высказывания были истинными:

а) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \ldots x \in B$; б)) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \ldots x \notin B$.

21. Выделите условие и заключение в теоремах:
а) равенство треугольников есть достаточное условие их равновеликости;
б) четность суммы есть необходимое условие четности каждого слагаемого.

22. Сформулируйте предложение, обратное следующей теореме: «Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма – четное число».

23. Сформулируйте предложения: обратное, противоположное и теорему, равносильную ей согласно закону контрапозиции:
а) «Если каждое слагаемое является четным числом, то и сумма – четное число»;
б) «Всякий параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник или квадрат».

24. Пользуясь законом контрапозиции, докажите теорему «Если $m^2+n^2 \neq 0$, то $m \neq 0$ или $n \neq 0$».

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 13

13.1 Понятие высказывания и высказывательной формы. Логические связки

Относительно понятий и отношений между ними можно высказывать различные суждения. Языковой формой суждений являются повествовательные предложения. Например,

1) число 12 – четное;
2) 2+5>8;
3) x+ 5=8;
4) от перестановки множителей произведение не изменяется.

О предложениях 1 и 4 можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 – ложную. О предложении 3 вообще нельзя сказать: истинное оно или ложное.

Высказыванием (*суждением, утверждением*) называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Например, предложения 1, 2, 4 – высказывания, причем предложения 1, 4 – истинные, а 2 – ложное.

Высказывания обозначают латинскими буквами: А, В, С, …Истинное высказывание записывают: А – «и», ложное пишут: А – «л».

«Истина» и «ложь» – *значения истинности высказывания*. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.

Предложение x+5=8 не является высказыванием. Однако при подстановке конкретных значений переменной x оно обращается в высказывание. Например, если x=2 – в ложное высказывание, а при x=3 – истинное высказывание. Предложение x+5=8 называется *высказывательной формой (предикатом)*.

По числу переменных, входящих в высказывательную форму, выделяют: одноместные, двухместные и т. д. высказывательные формы и обозначают А(x), А(x, y) и т. д. Например, x+5=8 – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая x параллельна прямой y» – двухместная.

Высказывательные формы предполагает задание такого множества, из которого выбираются значения переменных, входящих в них. Это множество называется *областью определения* высказывательной формы.

Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X, называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.

Множество значений переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание, называют *множеством истинности* высказывательной формы. Обозначается оно буквой Т. Тогда $T \subset X$.

В логике считают, что из двух данных предложений можно образовывать новые предложения, используя союзы «и», «или», «если…, то …», «тогда и только тогда, когда» и частицу «не» или словосочетания «неверно, что». Эти слова называют *логическими связками*, а предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют *составными*. Предложения, не являющиеся составными, называют *элементарными* или *простыми*.

Например, «Число 28 четное и делится на 7». Это предложение образовано из двух элементарных: «число 28 четное», «число 28 делится на 7» с помощью логической связки «и».

Чтобы определить значение истинности составного высказывания, надо знать смысл логических связок, с помощью которых оно образованно из элементарных, и уметь выявлять логическую структуру высказывания.

Для выявления логической структуры составного предложения нужно установить:

1) из каких элементарных предложений образовано данное составное предложение;

2) с помощью каких логических связок оно образовано.

Пример: «Если углы вертикальные, то они равны». Предложение А – «углы вертикальные», В – «углы равны», логическая связка «если…, то…». Логическая структура (форма) данного составного предложения: «если А, то В».

13.2 Конъюнкция и дизъюнкция высказываний

Пусть А и В – произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «и» составное высказывание. Полученное высказывание называют конъюнкцией *(логическим умножением)* и обозначают $A \wedge B$ (читают: «А и В»).

Конъюнкцией высказываний А и В называют высказывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Таблицы истинности конъюнкции:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Например, найдём значение истинности высказывания «число 28 делится на 7 и на 9», которое состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и», т. е. является конъюнкцией.

А – «число 28 делится на 7» – истинное высказывание,

В – «число 28 делится на 9» – ложное высказывание.

Следовательно, $A \wedge B$ – «число 28 делится на 7 и на 9» будет ложным.

Составные высказывания, состоящие из простых, соединенных союзом «и», изображаются на диаграмме Эйлера-Венна пересечением множеств. В обыденной речи конъюнкция может выражаться не только с помощью союза «и», но и другими, например, «а», «но», «однако», «не только…, но и …».

Выясним какой смысл имеет в математике союз «или». Пусть А и В – произвольные высказывания. Образуем из них с помощью союза «или» составное высказывание. Полученное высказывание называют дизъюнкцией (*логическим сложением*) и обозначают $A \vee B$ (читают: «А или В»).

Дизъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Таблица истинности дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

На диаграмме Эйлера-Венна высказывание «А или В» изображается объединением кругов А и В.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называется *логической операцией.* Операция, соответствующая союзу «и», называется *конъюнкцией*; операция, соответствующая союзу «или», – *дизъюнкцией*. Названия логических операций и их результаты называются одинаково.

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x)\wedge B(x)$. Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве X, обозначают $A(x)\vee B(x)$.

С точки зрения логики любая система неравенств (уравнений) есть конъюнкция неравенств (уравнений). Дизъюнкцию уравнений (неравенств) называют так же совокупностью уравнений (неравенств).

13.3 Высказывания с кванторами

В формулировках математических предложений часто встречаются слова: «каждый», «все», «некоторые», «хотя бы один».

Если перед высказывательной формой «число x кратно 5» поставить слово «всякое», то получится предложение «всякое число x кратно 5». Относительно этого предложения можно задать вопрос, истинно оно или ложно. Значит, данное предложение – высказывание, причем ложное.

Выражение «для всякого x» в логике называется *квантором общности* по переменной x и обозначается символом $\forall x$.

Запись $(\forall x)A(x)$ означает: «для всякого значения x предложение $A(x)$ – истинное высказывание». Запись $(\forall x\in X)\ A(x)$ можно прочитать:

а) для всякого x из множества X истинно $A(x)$;

б) всякий элемент из множества X обладает свойством А.

Выражение «существует x такое, что…», в логике называют *квантором существования* по переменной x и обозначается символом $\exists x$.

Запись $(\exists x)\ A(x)$ означает: «существует такое значение x, что $A(x)$ истинное высказывание». Предложение $(\exists x\in X)\ A(x)$ можно читать:

а) существует такое x из множества X, что истинно $A(x)$;

б) хотя бы один элемент x из множества X обладает свойством А.

В математике наряду со словом «всякий» употребляются слова «каждый, любой», а вместо слова «существует» используют слова «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один». Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Убедиться в ложности высказывания – это значит опровергнуть его.

13.4 Отрицание высказываний. Правила построения отрицания

Пусть А – высказывание. Если перед сказуемым данного предложения поставить частицу «не», либо перед всем предложением поставить слова «неверно, что», то получится новое предложение, которое называется отрицанием данного и обозначается: $\overline{A}$ (читают: «не А» или «неверно, что А»).

Отрицанием высказывания А называется высказывание $\overline{A}$, которое ложно, когда высказывание А истинно, и истинно, когда А – ложно.

Таблица истинности отрицания имеет вид:

А	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Из определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

Построим, например, отрицание ложного высказывания «число 28 делится на 9»:

1) число 28 не делится на 9;
2) неверно, что число 28 делится на 9.

Получили истинные высказывания. Значит, отрицание данного предложения построено правильно.

Отрицанием конъюнкции двух высказываний А и В является дизъюнкция их отрицаний, т.е. справедлив первый закон де Моргана:

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$$

Аналогично выполняется второй закон де Моргана:

$$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B},$$

т. е. отрицанием дизъюнкции двух высказываний А и В является конъюнкция их отрицаний.

Из этих законов вытекает следующее правило построения отрицания конъюнкции и дизъюнкции: *чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие ее высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).*

Пример. Построить отрицание высказывания «число 28 делится на 9 или на 6».

Решение. 1 способ: поставим перед высказыванием слова «неверно, что». Получим «неверно, что число 28 делится на 9 или на 6».

2 способ: воспользуемся законом де Моргана. Получим «число 28 не делится на 9 и не делится на 6».

Правила построений отрицаний высказываний, содержащих кванторы.

Если дано предложение ($\forall x$)А(x), то его отрицанием будут предложения $\overline{(\forall x)A(x)}$ и ($\exists x$) $\overline{A(x)}$, имеющие один и тот же смысл (и одно и то же значение истинности). Аналогично если дано предложение ($\exists$ x)А(x), то его отрицанием будут предложения $\overline{(\exists x)A(x)}$ и ($\forall x$) $\overline{A(x)}$, также имеющие один и тот же смысл (и одно и то же значение истинности). Получаем две равносильности:

$$\overline{(\forall x)A(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\, \overline{A(x)};$$

$$\overline{(\exists x)A(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\, \overline{A(x)}.$$

Из них вытекает правило: *для того, чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора.*

Пример. Построить отрицание высказывания «некоторые однозначные числа делятся на 10».

Решение. Сделать это можно двумя способами:

1) Поставим перед высказыванием слова «неверно, что». Получим «неверно, что некоторые однозначные числа делятся на 10».

2) Заменим квантор существования (он выражен словом «некоторые») на квантор общности «все» и построим отрицание предложения, стоящего после слова «некоторые», поставив частицу «не» перед сказуемым. Получим высказывание «все однозначные числа не делятся на 10».

13.5 Отношения логического следования и равносильности между предложениями

Рассмотрим две высказывательные формы: «число x кратно 4» и «число x кратно 2», заданные на множестве натуральных чисел. Из того, что число x кратно 4, следует, что x кратно 2, но не наоборот. В данном случае говорят, что данные предложения находятся в отношении логического следования.

Высказывательная форма В(x) *следует* из высказывательной формы А(x), если В(x) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых А(x) истинна.

Обозначается А(x)$\Rightarrow$В(x). Прочитать это можно по разному:

1. Из А(x) следует В(x).
2. Всякое А(x) есть В(x).
3. Если А(x), то В(x).

4. B(x) есть следствие A(x).
5. A(x) есть достаточное условие для B(x).
6. B(x) есть необходимое условие для A(x).

Высказывание «если А, то В» еще называется *импликацией* высказываний или *условным высказыванием*. Таблица истинности для импликации имеет вид:

A	B	A⇒B
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Предложение A(x)⇒B(x) может быть истинным либо ложным. Но так как оно может быть сформулировано в виде «всякое A(x) есть B(x)», то его истинность устанавливается путем доказательства, а ложность – с помощью контрпримера.

Рассмотрим две высказывательные формы A(x) – «число делится на 3» и B(x) – «сумма цифр в записи числа делится на 3». В этом случае говорят, что предложения A(x) и B(x) равносильны.

Предложения A(x) и B(x) *равносильны*, если из предложения A(x) следует предложение B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).

Обозначается A(x)⇔B(x), которое можно прочитать по-разному:

1. A(x) равносильно B(x).
2. A(x) тогда и только тогда, когда B(x).
3. A(x) необходимое и достаточное условие для B(x).
4. B(x) необходимое и достаточное условие для A(x).

Высказывание A⇔B еще называют *эквиваленцией* высказываний А и В. Таблица истинности имеет вид:

A	B	A ⇔ B
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

13.6 Структура теоремы. Виды теорем

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема представляет собой высказывание вида А⇒В, где А и В – высказывание формы с одной или несколькими переменными. Предложение А называют условием теоремы, предложение В – заключением теоремы.

Например, условием теоремы «если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны» является предложение «четырехугольник – прямоугольник», а заключением – «в таком четырехугольнике диагонали равны».

В математике кроме теорем используются предложения, называемые *правилами* и *формулами*.

В математике можно составить утверждения следующего вида:

1) $A \Rightarrow B$ – прямая теорема. Читают ее: «если А, то В». Например, «если углы вертикальные, то они равны».

2) $B \Rightarrow A$ – утверждение, обратное данному. Оно читается «если В, то А». Например, «если углы равны, то они вертикальные». В данном случае это утверждение ложно. Поэтому утверждение, обратное теореме не всегда является теоремой и требует доказательства.

3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – утверждение, противоположное данному. Читается «если не А, то не В». Например, «если углы не вертикальные, то они не равны». Это ложное высказывание. Поэтому утверждение, противоположное теореме также требует доказательства и не всегда является теоремой.

4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – утверждение, обратное противоположному. Его можно прочитать «если не В, то не А». Например, «если углы не равны, то они не вертикальные». Это истинное предложение и, следовательно, является теоремой.

Для этого случая имеет место равносильность: (А⇒В) ⇔ ($\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$). Её называют законом контрапозиции. Согласно ему, предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой и, значит, вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

Если для данной теоремы А⇒В существует обратная В⇒А, то их можно соединить в одну А⇔В, используя слова «необходимо и достаточно» или «тогда и только тогда, когда». И доказательство такой теоремы сводится к доказательству двух указанных теорем.

Тема 14 «Умозаключения и их виды»

Цель: сформировать у студентов понятие умозаключения, их составляющих и основных видов умозаключений, используемых в начальной школе (дедуктивное, неполная индукция, аналогия), выработать умения различать основные виды умозаключений среди прочих и строить дедуктивные умозаключения в соответствии с правилами вывода, а также проверять их правильность с помощью кругов Эйлера.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 14

1. Что называется умозаключением? Приведите примеры.
2. Из чего состоит умозаключение?
3. Дайте понятие посылки и заключения.
4. Какое умозаключение называется дедуктивным?
5. Какова схема дедуктивного умозаключения?
6. Что называется неполной индукцией?
7. Что называется аналогией?
8. Выводы, полученные с помощью каких рассуждений, носят характер предположений и нуждаются в дальнейшей проверке?
9. Какие схемы дедуктивных умозаключений вам известны?
10. Какова структура каждого из этих правил?
11. Как проверить правильность умозаключения с помощью кругов Эйлера?

Задания для работы в аудитории по теме 14

Задача № 1. Объясните, почему высказывания считают истинными:

а) 7>5; б) 7+3>7+1.

Сформулируйте правила, которыми вы воспользовались.

Задача № 2. Известно, что если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный. Следует ли из этого, что:

а) треугольник с двумя углами по 40° – равнобедренный;

б) треугольник с двумя сторонами по 4 см – равнобедренный.

Задача № 3. Известно, что запись числа оканчивается цифрой 8. Следует ли из этого, что данное число делится на:

а) 2; б) 4?

Задача № 4. Выскажите предположение, рассмотрев несколько частных случаев. К однозначному числу приписали такую же цифру. Во сколько раз увеличилось число?

Задача № 5. Сравните значение выражений $(a+6)(7-a)$ и $a(a-1)$ при a=–3, 0, 2. Верно ли, что при любом целом a значение первого выражения больше, чем второго?

Задача № 6. Известно, что если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Верны ли следующие высказывания, сформулированные по аналогии с данными:

А) если число делится на 10, то оно делится на 2 и на 5;

Б) если число делится на 12, то оно делится на 2 и на 6;

В) если число делится на 14, то оно делится на 2 и на 7?

Задача № 7. В каждом из следующих умозаключений выделите посылки и заключение:
а) если число натуральное, то оно целое; если число целое, то оно рациональное, следовательно, если число натуральное, то оно рациональное;
б) если число натуральное, то оно целое; число 138 – натуральное, следовательно, оно целое;
в) всякое натуральное число целое; число 138 – целое, следовательно, оно натуральное;
г) всякое натуральное число целое; число 0,2 не является целым, следовательно, оно не является и натуральным.
Проанализируйте схему каждого умозаключения. Есть ли среди них умозаключения, не являющиеся дедуктивными?

Задача № 8. Используя правило заключения, закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным «Если четырехугольник – прямоугольник, то в нем диагонали равны. Четырехугольник АВСД …».
Закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным, используя правило отрицания.

Задача № 9. Каким числом может быть сумма двух нечетных чисел? Рассмотрите несколько частных случаев и выскажите предположение. Каким образом можно доказать его истинность?

Задача № 10. Покажите, что обосновывая решение следующей задачи, младшие школьники могут использовать полную индукцию: «Дан ряд чисел: 3545, 3550, 3555, 3560, 3565. Можно ли утверждать, что каждое число этого ряда делится на 5?»

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 14

1. В четырехугольнике АВСД диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам. Верно ли, что АВСД:
а) ромб; б) квадрат; в) прямоугольник?

2. Выскажите предположение, рассмотрев несколько частных случаев. Имеются два числа, ни одно из которых не делится на 3. Может ли (и при каком условии) сумма этих чисел разделиться на 3?

3. Даны верные равенства: 74–47=27, 52–25=27, 63–36=27. Верно ли, что разность любого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?

4. Используя правило заключения, закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным «Равные треугольники имеют равные площади. Треугольники ABC и KLM …». Закончите умозаключение так, чтобы оно было дедуктивным, используя правило отрицания.

5. Постройте дедуктивное умозаключение, доказывающее, что
а) 130 делится на 10; б) 137 не делится на 10.

6. Используя круги Эйлера, проверьте, правильны ли следующие умозаключения:
а) всякий квадрат является прямоугольником; четырехугольник АВСД не квадрат, следовательно, он не является прямоугольником;
б) некоторые прямоугольники – квадраты; все квадраты – правильные многоугольники, следовательно, некоторые прямоугольники являются правильными многоугольниками.

7. Верно ли, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8?

8. Покажите, что обосновывая решение следующей задачи, младшие школьники могут использовать полную индукцию: «Можно ли утверждать, что значения всех выражений одинаковы:
326326:326; 236236:236; 626626:626?»

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 14

14.1 Умозаключения и их виды

Умозаключение наряду с понятием и суждением является формой мышления. Опосредованно, с помощью многообразных видов умозаключения можно получать новые знания. Построить умозаключение можно при наличии одного или нескольких истинных суждений, поставленных во взаимную связь. *Умозаключение (рассуждение)* – способ получения нового знания на основе некоторого имеющегося.

Умозаключение состоит из посылок и заключения.

Посылки – это высказывания, содержащие исходное знание.

Заключение – это высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходного.

В умозаключении из посылок выводится заключение. Логический переход от посылок к заключению называется выводом.

Пример умозаключения.

Все углероды горючи.

Алмаз — углерод.

Алмаз горюч.

В приведенном примере два первых суждения, являются посылками; суждение: «Алмаз горюч» – является заключением.

Умозаключение – форма мышления, в которой из одного или нескольких суждений на основании определенных правил вывода получается новое суждение, с необходимостью или определенной степенью достоверности следующее из них.

Умозаключения бывают разными.

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

Схематично умозаключение можно представить так: $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – посылки, а B – заключение. Часто используют запись: $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$. Черта заменяет слово «следовательно».

Пример. Ученику предлагается объяснить, почему число 23 можно представить в виде суммы 20+3. Он рассуждает: «Число 23 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 23=20+3».

В этом примере заключение логически следует из посылок и истинность его очевидна. В дедуктивном умозаключении всегда, когда истинны посылки, истинно и заключение.

Неполная индукция – это умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

Пример. Используя различные средства наглядности, школьники устанавливают, что, например, $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$, $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$. А затем на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел $а$ и $в$ верно равенство $а \cdot в = в \cdot а$.

Неполная индукция не является дедуктивным умозаключением, поскольку, рассуждая по такой схеме, можно прийти к ложному выводу. Например, рассмотрев такие неравенства $3+5< 3\cdot5$, $2+7< 2\cdot7$, $4+8< 4\cdot8$, можно сделать вывод о том, что $(\forall а,\ в\in \mathbf{N})\ а+в<а\cdot в$. Но это утверждение ложно, в чем можно убедиться с помощью контрпримера: 1+2 не меньше, чем произведение $1 \cdot 2$.

Таким образом, выводы, полученные с помощью неполной индукции носят характер предположения и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Аналогия – это умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.

Пример. После рассмотрения способа умножения двузначного числа на однозначное на примере умножения $27 \cdot 3 = (20+7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 81$ детям предлагается умножить 712 на 4. Действуя по аналогии, они устанавливают, что $712\cdot 4 = (700+10+2) \cdot 4 = 2800+40+8 = 2848$. Далее по аналогии устанавливают, как умножить 6288 на 3.

Вывод по аналогии носит характер предположения и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении. Например, число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.

Действуя по аналогии, можно сделать вывод, что число делится на 8, если оно делится на 2 и на 4. Убедиться в ложности этого вывода можно, приведя контрпример: число 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8.

14.2 Схемы дедуктивных умозаключений

«В холодную погоду нужно тепло одеваться. Сегодня холодно? Холодно. Вот и одевайся теплей!» – фрагмент разговора с маленьким сыном, являющийся дедуктивным умозаключением.

В дедуктивных умозаключениях мысль движется от общего к частному. Эти умозаключения позволяют строить частные суждения из общих. Они широко применяются уже на начальном этапе обучения математике.

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. В логике существуют правила, по которым можно строить дедуктивные умозаключения. Их называют правилами вывода или схемами дедуктивных (правильных) умозаключений:

1. $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$ – *правило заключения*.

В нем обозначены две посылки A(x)⇒B(x) и A(a). Первую называют общей посылкой, это может быть теорема, определение и т. д. Вторая посылка A(a) – частная, она получается из условия A(x) при x=a. Предложение B(a)– это заключение, оно получается из B(x) при x=a.

Например, «если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Запись числа 135 оканчивается цифрой 5. Следовательно, число 135 делится на 5». Здесь A(x) – это «запись числа x оканчивается цифрой 5», B(x) – «число x делится на 5», A(a) – «запись числа 135 оканчивается цифрой 5», B(a)– «число 135 делится на 5».

2. $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$ – *правило отрицания*.

Например, «если запись числа x оканчивается цифрой 5, то число x делится на 5. Число 177 не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается цифрой 5».

3. $\dfrac{A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$ – *правило силлогизма*.

Например, «если число x кратно 12, то оно кратно 6. Если число x кратно 6, то оно кратно 3. Следовательно, если число x кратно 12, то оно кратно 3».

Выполняя рассуждения по этим правилам, всегда получается истинное заключение.

Иногда в процессе рассуждений указанные правила сокращают, опуская одну из посылок. Например, объясняя, почему 6< 8, ученик говорит, что «6 при счете называют раньше, чем 8, значит, 6<8». В объяснении ученика пропущена общая посылка: «если число a при счете называют раньше числа $в$, то a меньше $в$». Если ее восстановить, то получим правило заключения.

Доказать какое-либо утверждение – это значит показать, что это утверждение логически следует из системы истинных и связанных с ним утверждений.

В логике считают, что если рассматриваемое утверждение логически следует из уже доказанных утверждений, то оно обоснованно и также истинно, как и последние.

Основой математического доказательства является дедуктивный вывод. А само *доказательство* – это цепочка дедуктивных умозаключений, расположенных в определенном порядке, причем заключение каждого из них (кроме последнего) является посылкой в одном из последующих умозаключений.

По способу ведения (т. е. по форме) различают *прямые* и *косвенные* доказательства.

В *прямом* доказательстве, основываясь на некотором истинном предложении и с учетом условия теоремы, строится цепочка дедуктивных умозаключений, которая приводит к истинному заключению.

Косвенное доказательство – это такое, в котором истинность утверждения обосновывается с помощью опровержения противоречащего утверждения. Примером косвенного доказательства является доказательство *методом от противного.*

Тестовые задания по разделу 4

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Не является существенным свойством	1) иметь четыре стороны

<table>
<tr><td></td><td>для понятия «квадрат»</td><td>2) сторона АВ – горизонтальна
3) иметь четыре прямых угла
4) иметь равные диагонали</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Каким вариантом нужно дополнить таблицу истинности
<table><tr><td>А</td><td>В</td><td>$A \wedge B$</td></tr><tr><td>И
И</td><td>И
Л</td><td></td></tr></table></td><td>1) И 2) И 3) Л 4) Л
И Л И Л</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Конъюнкция высказываний А и В истинна, когда ...</td><td>1) А-истина, В- истина
2) А-истина, В - ложь
3) А-ложь, В - истина
4) А-ложь, В - ложь</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Понятия «четное число» и «нечетное число»</td><td>1) несовместимые
2) тождественны
3) противоположные
4) находятся в родовидовых отношениях</td></tr>
<tr><td>5</td><td>А – «На улице идет дождь», В – «Мостовая мокрая». Укажите высказывание, соответствующее формуле $A \Rightarrow B$</td><td>1) Мостовая мокрая тогда и только тогда, когда на улице идет дождь
2) Если на улице идет дождь, то мостовая мокрая
3) На улице идет дождь и мостовая мокрая
4) Мостовая мокрая или на улице идет дождь</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Укажите все предложения, которые являются отрицанием данного «Число 28 делится на 5»</td><td>1) число 28 не делится на 5
2) неверно, что число 28 делится на 5
3) число 28 делится не на 5
4) число 5 не делится на 28</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Вместо многоточия вставьте нужное слово
«Отрицанием дизъюнкции двух высказываний является ... их отрицаний»</td><td>1) конъюнкция
2) дизъюнкция
3) эквиваленция
4) импликация</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Среди понятий «четырехугольник» и «прямоугольник» первое из них является ...</td><td>1) видовым
2) родовым</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Значение истинности высказывания «число 123 делится на 3 и на 9»</td><td>1) истина
2) определить нельзя
3) ложь</td></tr>
<tr><td>10</td><td>«Если четырехугольник является прямоугольником, то в нем диагонали равны». Предложением, противоположным данному, является:</td><td>1) «Если четырехугольник не является прямоугольником, то в нем диагонали не равны»,
2) «Если в четырехугольнике диагонали равны, то он – прямоугольник»,
3) «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то он не является прямоугольником»,
4) «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то он – прямоугольник».</td></tr>
</table>

РАЗДЕЛ 5
КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Тема 15 «Комбинаторные задачи и элементы теории вероятностей»

Цель: сформировать у студентов понятие комбинаторной задачи и общих правил комбинаторики, вероятности появления события; выработать умение решать задачи, применяя формулы нахождения числа размещений, перестановок и сочетаний, решать простейшие задачи по теории вероятностей.

Контрольные и проблемные вопросы по теме 15

1. Какие задачи называют комбинаторными?
2. Как формулируется комбинаторное правило суммы?
3. Как формулируется комбинаторное правило произведения?
4. Что называется размещениями с повторениями? Без повторений?
5. По каким формулам находится число размещений с повторениями и без повторений?
6. Что называется перестановками с повторениями? Без повторений?
7. По каким формулам находится число перестановок с повторениями и без повторений?
8. Что называют сочетаниями без повторений?
9. По какой формуле находится число сочетаний без повторений?
10. Что называют теорией вероятностей?
11. Какие виды событий вам известны? С какими событиями имеет дело теория вероятностей?
12. Что называется вероятностью появления события?
13. Сформулируйте классическое определение вероятности.
14. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
15. Как найти вероятность противоположного события?
16. Какова формула Бернулли?

Задания для работы в аудитории по теме 15

Задача № 1. Сколько всего двузначных чисел можно составить из цифр 7, 4 и 5 при условии, что они в записи числа не повторяются?

Задача № 2. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4 и 5?

Задача № 3. Сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и 3?

Задача № 4. Из 20 учащихся класса надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать?

Задача № 5. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6?

Задача № 6. Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек?

Задача № 7. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из десяти различных красок?

Задача № 8. Решите задачу методом перебора и используя формулы комбинаторики. «Аня, Боря, Вера, Гена – лучшие лыжники школы. На соревнования надо выбрать из них троих. Сколькими способами можно это сделать?».

Задача № 9. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Задача № 10. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Задача № 11. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 рублей, на 4 билета – выигрыш по 50 рублей, на 10 билетов – выигрыш по 20 рублей, на 20 билетов – выигрыш по 10 рублей, на 165 билетов – выигрыш по 5 рублей, на 400 билетов – выигрыш по 1 рублю. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 рублей?

Задача № 12. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули сразу 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара – белые.

Задача № 13. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули 1 шар. Найти вероятность того, что вынутый шар:

а) белый; б) черный;
в) синий; г) красный;
д) белый или черный; е) синий или красный;
ж) белый, черный или синий.

Задача № 14. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Задача № 15. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули 2 шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Задача № 16. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0, 75, для второго – 0,8, для третьего – 0, 9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме 15

1. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

2. В соревновании участвуют 10 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места?

3. Решите задачи, используя формулы. Ответ проверьте с помощью перебора всех возможных вариантов:

   а) «Государственные флаги некоторых стран состоят из трех горизонтальных полос разного цвета. Сколько различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосами можно составить?»

   б) «Мальчик выбрал в библиотеке 5 книг. По правилам библиотеки одновременно можно взять только 2 книги. Сколько у мальчика вариантов выбора двух книг из пяти?»

   в) Задача Леонардо Эйлера. «Трое господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?»

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «математика»?
5. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены отметки, если известно, что ни один из студентов не получит неудовлетворительной оценки?
6. Если в урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных, то какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из урны будет красного цвета?

7. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 – выигрышные и 500 – невыигрышные. Куплено 2 билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные.

8. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0, 75, для второго – 0,8, для третьего – 0, 9. Определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

9. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 5 детей, будет 3 девочки и 2 мальчика. Вероятность рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Теоретический материал для освоения и осмысления темы 15

15.1 Понятие комбинаторной задачи. Правило суммы и произведения

В обыденной жизни нередко встречаются задачи, которые имеют несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или подсчитывать их число. Задачи, требующие такого решения, называются *комбинаторными.*

С теоретико–множественной точки зрения решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой.*

В начальном обучении математике роль комбинаторных задач постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для подготовки учащихся к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса нередко используются таблицы и графы.

В комбинаторике правило нахождения числа элементов объединения двух непересекающихся конечных множеств называют *правилом суммы* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами (не такими, как a), то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m+k$ способами.

Правило нахождения числа элементов декартова произведения двух множеств называют в комбинаторике *правилом произведения* и формулируют в таком виде:

Если объект a можно выбрать m способами, а объект b – k способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

15.2 Размещения, перестановки и сочетания с повторениями и без повторений

Используя цифры 7, 4 и 5, можно образовать различные двузначные числа: 77, 74, 75, 47, 44, 45, 57, 54, 55. В записи этих чисел цифры повторяются.

С теоретико-множественной точки зрения запись любого двузначного числа – это кортеж длины 2. Записывая различные двузначные числа с помощью цифр 7, 4 и 5, мы по сути дела образовывали из данных трех цифр различные кортежи длины 2 с повторяющимися элементами. В комбинаторике такие кортежи называют *размещениями с* повторениями из трех элементов по два элемента.

Размещение с повторениями из k элементов по т элементов – это кортеж, составленный из т элементов k-элементного множества.

Число всевозможных размещений с повторениями из k элементов по m элементов обозначают $\tilde{A}_k^m$ и подсчитывают по формуле $\tilde{A}_k^m = k^m$.

Пользуясь этой формулой, легко подсчитать, сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5. Так как речь идет о размещениях с повторениями из трех элементов по два, то $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Нередко встречаются задачи, в которых требуется подсчитать число кортежей длины m, образованных из k элементов некоторого множества, но при условии, что элементы в кортеже не повторяются. Такие кортежи называются размещениями без повторений из k элементов по m элементов.

Размещение без повторений из k элементов по т элементов – это кортеж, составленный из т неповторяющихся элементов множества, в котором k элементов.

Число всевозможных размещений без повторений из k элементов по m элементов обозначают A_k^m и подсчитывают по формуле:

$$A_k^m = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-m+1).$$

Например, число двузначных чисел, записанных с помощью цифр 7, 4 и 5 так, что цифры в записи числа не повторяются, есть число размещений без повторений из трех элементов по два:

$A_3^2 = 3 \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6.$

Задача. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, так, чтобы цифры в записи числа не повторялись.

Решение. В задаче рассматриваются размещения без повторений из трех элементов по три, и их число можно подсчитать по формуле:

$$A_3^3 = 3 \cdot (3-1) \cdot (3-2) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Эти числа таковы: 745, 754, 475, 457, 547, 574.

Заметим, что в данном случае разные числа получаются в результате перестановки цифр. Поэтому размещения из k элементов по k элементов называют *перестановками* из k элементов без повторений.

Число перестановок без повторений из k элементов обозначают P_k и подсчитывают по формуле $P_k = k!$, где $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ и читают «k факториал». Таким образом, перестановки без повторений – это частный случай размещения без повторений.

Кортежи длины m, в которые входит элемент a_1 – m_1 раз, элемент a_2 – m_2 раз, …, элемент a_k – m_k раз ($m_1+m_2+\ldots+m_k=m$), называют *перестановками с повторениями состава* $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Их число выражается формулой: $P(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \dfrac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots m_k!}$.

Из элементов множества $X = \{7, 4, 5\}$ можно образовывать не только кортежи различной длины, но и различные подмножества, например двухэлементные. В комбинаторике их называют *сочетаниями без повторений* из трех элементов по два элемента.

Сочетание без повторения из k *элементов по* m *элементов* – это m-элементное подмножество множества, содержащего k элементов.

Два сочетания из k элементов по m элементов отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов обозначают C_k^m и находится по формуле:

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Применение формул облегчает подсчет числа возможных вариантов решений той или иной комбинаторной задачи. Однако, чтобы воспользоваться формулой, необходимо определить вид комбинаций, о которых идет речь в задаче, что бывает сделать не очень просто.

15.3 События и вероятность. Классическое определение вероятности

Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб» – случайное.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях. Каждое такое осуществление данной совокупности условий называют *испытанием*. Например, испытание – это бросание кубика, на гранях которого проставлены цифры от 1 до 6, выпадение пятерки – событие. События обозначают заглавными буквами: А, В, С, …

События называют *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например, при бросании монеты появление «герба» исключает появление «надписи».

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

События называются *равновозможными,* если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например, появление «герба» и «надписи» при бросании монеты – равновозможные события.

Вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Вероятностью события А называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события *А* определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где *m* - число элементарных исходов, благоприятствующих *А;*
n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей, т. е. $0 < P(A) < 1$.

15.4. Сумма и произведение событий. Противоположные события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность

Суммой А+В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий (т.е. или А, или В, или оба вместе).

Например, если из орудия произведены два выстрела и А – попадание при первом выстреле, В – попадание при втором выстреле, то А+В – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

Если два события А и В – несовместные, то А+В – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Произведением двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

Например, если А – деталь годная, В – деталь окрашенная, то АВ – деталь годная и окрашена.

Противоположным событию А называется событие $\overline{A}$, которое происходит только тогда, когда не происходит событие А.

Например, при выстреле по цели попадание и промах – противоположные события. Часто вероятности противоположных событий обозначают *p* и *q*.

События А и $\overline{A}$ образуют полную группу.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A)+P(B).$$

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара (событие А) $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Вероятность появления синего шара (событие В) Р(В)=$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. События А и В несовместны, поэтому по теореме сложения Р(А+В)= $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Два события называются *независимыми,* если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому данные события независимы.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равно 0,8, а вторым (событие В) – 0,7.

Решение. Р(АВ) = Р(А)·Р(В)=0,7·0,8=0,56.

События называют *совместными,* если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Например, А– появление четырех очков при бросании игральной кости и В – появление четного числа очков. События А и В – совместные.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A)+P(B)- P(AB).$$

Пример. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий, если вероятности попадания в цель первого и второго орудий соответственно равны: p_1=0,7; p_2=0,8.

Решение. Вероятность события АВ (оба орудия дали попадание) Р(АВ)=0,7·0,8=0,56. Искомая вероятность Р(А+В)=0,7+0,8–0,56=0,94.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события В, найденная при условии, что событие А уже наступило.

Условная вероятность находится по формуле: $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие В), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие А).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая вероятность $P_A(B)=\frac{3}{5}$. Этот же результат можно получить по формуле $P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}$. Вероятность появления белого шара при первом испытании Р(А)=$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Найдем вероятность Р(АВ) того, что при первом испытании появится черный шар, а во втором – белый. Общее число исходов – совместного появления двух шаров равна числу размещений A_6^2=6·5=30. Событию АВ благоприятствуют 3·3=9 исходов. Следовательно, Р(АВ)=$\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$. Тогда искомая условная вероятность $P_A(B)=\frac{3}{10}:\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$.

Теорема умножения вероятностей для зависимых событий. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Пример. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие А) $P(A)=\frac{3}{10}$. Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие В), вычисленная в предположении, что первый валик конусный, т. е. условная вероятность $P_A(B)=\frac{7}{9}$. По теореме умножения, искомая вероятность $P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

Тестовые задания по разделу 5

№	Тестовый вопрос	Варианты ответов
1	Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4, 5 (используя каждую цифру только один раз)	1) 12, 2) 4, 3) 16, 4) 8.
2	Найдите число всевозможных «слов» из букв слова «МОРОЗ»	1) 60, 2) 120, 3) 30, 4) 10.
3	Согласно правила комбинаторики: «Если объект *а* можно выбрать *m* способами, а объект *в – n* способами, то пару (*а, в)* можно выбрать:	1) $m\cdot n$ способами, 2) $m+n$ способами, 3) $2m\cdot n$ способами, 4) $m–n$ способами.
4	Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 4 человека ?	1) 5, 2) 24, 3) 15, 4) 120.
5	Число всевозможных перестановок без повторений из k элементов можно найти по формуле:	1) $\tilde{A}_k^m = k^m$, 2) $A_k^m = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)$, 3) $P_k=k!$, 4) $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$.
6	Число всевозможных сочетаний без повторений из k элементов по m элементов можно найти по формуле:	1) $\tilde{A}_k^m = k^m$, 2) $A_k^m = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)$, 3) $P_k=k!$, 4) $C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}$.
7	На плоскости даны 6 точек, никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Через эти точки проводят прямые. Таким образом можно получить … различных прямых	1) 20, 2) 15, 3) 6, 4) 13.
8	Найдите число всевозможных «слов» из букв слова «ЛУК»	1) 6 2) 3 3) 9 4) 2
9	Событие, которое при осуществлении совокупности условий может либо произойти, либо не произойти, называется	1) невозможным, 2) случайным, 3) достоверным, 4) невероятным.
10	Если в урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных, то вероятность того, что наудачу извлеченный шар	1) 1/4, 2) 1/12, 3) 1,

	из урны будет белого цвета, равна	4) 3/5.

Теоретические вопросы к экзамену

1. Понятие множества и элемента множества. Виды множеств. Основные числовые множества.
2. Способы задания множеств. Отношения между множествами. Круги Эйлера.
3. Пересечение множеств. Объединение множеств. Свойства пересечения и объединения множеств.
4. Вычитание множеств. Дополнение множеств.
5. Понятие разбиения множества на классы. Разбиение множества на классы с помощью свойств.
6. Декартово произведение множеств. Свойства декартова произведения 2-х множеств. Графическое изображение декартова произведения 2-х множеств. Понятие кортежа. Декартово произведения ***n*** множеств.
7. Число элементов в объединении и разности конечных множеств. Число элементов в декартовом произведении конечных множеств.
8. Понятие соответствия. Способы задания соответствий.
9. Виды соответствий. Соответствие, обратное данному. Отображения. Взаимно однозначное соответствие. Равномощные множества.
10. Понятие отношения на множестве. Способы задания отношений.
11. Свойства отношений.
12. Отношение эквивалентности. Взаимосвязь отношения эквивалентности и разбиения множества на классы. Отношение порядка. Упорядоченное множество.
13. Понятие функции. Способы задания функции. Свойства функций (монотонность, возрастание, убывание).
14. Прямая пропорциональность (определение, свойства, график, примеры).
15. Обратная пропорциональность (определение, свойства, график, примеры).
16. Линейная функция (определение, свойства, график, примеры).
17. Выражения. Алфавит математического языка. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественные преобразования выражений.
18. Числовые равенства и их свойства. Числовые неравенства и их свойства.
19. Уравнения с одной переменной. Теоремы о равносильности уравнений и следствия к ним.
20. Неравенства с одной переменной. Теоремы о равносильности неравенств и следствия к ним.
21. Математические понятия. Объем и содержание понятий. Отношения между понятиями.
22. Определение понятий. Требования, предъявляемые к определениям. Определение понятий в начальном курсе математики.
23. Понятие высказывания. Высказывательные формы. Образование составных предложений с помощью логических связок.
24. Конъюнкция высказываний. Дизъюнкция высказываний. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.
25. Высказывания с кванторами. Доказательство истинности или ложности высказываний с кванторами.
26. Отрицание высказываний. Законы Де Моргана. Правила построений отрицаний высказываний, содержащих кванторы.
27. Отношение логического следования между предложениями. Отношение равносильности между предложениями.
28. Структура теоремы. Виды теорем.
29. Умозаключения и их виды (дедуктивные, неполная индукция, аналогия).
30. Схемы дедуктивных умозаключений. Проверка правильности умозаключений с помощью кругов Эйлера.
31. Понятие комбинаторной задачи. Правила суммы и произведения.
32. Размещения с повторениями и без повторений.
33. Перестановки с повторениями и без повторений.
34. Сочетания с повторениями и без повторений.

35. События и вероятность. Понятие вероятности. Классическое определение вероятности.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для бакалавров / Н. В. Богомолов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 495 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – ISBN 978-5-9916-2648-4.

2. Математика. Сборник задач: учебное пособие для студентов учреждений ВПО, обучающихся по направлению подготовки «Педагогическое образование» профиль «Начальное образование» / Л. П. Стойлова, Е. А. Конобеева, Т. А. Конобеева, И. В. Шадрина. – М. : Академия, 2012. – 240 с. – (Бакалавриат) – ISBN 978-5-7695-8142-7.

3. Пенчанский, С.Б. Основы начального курса математики в примерах и задачах : учебное пособие / С.Б. Пенчанский. – Минск : РИПО, 2018. – 240 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=497498 – Библиогр. в кн. – ISBN 978-985-503-830-7.

4. Стойлова, Л. П. Математика: учебник для использования в образовательных учреждениях, реализующих программы ВПО по дисциплине "Математика" по направлению 050100 "Педагогическое образование", профиль подготовки "Начальное образование" / Л. П. Стойлова. – 2-е изд,, перераб. и доп. – М. : Академия, 2012. – 464 с. – (Высшее педагогическое образование. Бакалавриат). – ISBN 978-5-7695-7970-7.

5. Элементы теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие / Т.А. Гулай, А.Ф. Долгополова, В.А. Жукова и др. - Ставрополь : Сервисшкола, 2017. - 117 с. : ил. - Библиогр.: с. 109 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485077

Дополнительная литература

1. Аматова, Г. М. Математика : учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений : в 2-х кн. Кн. 1 / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. – М.: Академия, 2008. – 249 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-7695-3999-2.
2. Аматова, Г. М. Математика.: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений : в 2-х кн. Кн. 2 / Г. М. Аматова, М. А. Аматов. – М. : Академия, 2008. – 237 с. – (Высшее профессиональное образование). – ISBN 978-5-7695-4002-8.
3. Бородин, А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс] : учеб. пособие. — Санкт-Петербург : Лань, 2011. — 256 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2026.
4. Воронина Л.В, Воробьева Г.В., Калинина Г.П., Утюмова Е.А. Основы математики [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов по направлению 44.03.01 – “Педагогическое образование»/ Екатеринбург. – 2015. – URL: http://elar.uspu.ru/bitstream/uspu/4104/1/uch00081.pdf.
5. Виноградова, Е.П. Математика : учебное пособие / Е.П. Виноградова. - 2-е изд., стер. - Москва : Издательство «Флинта», 2014. - Ч. 3. - 212 с. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9765-1939-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=439527
6. Виноградова, Е.П. Математика : учебное пособие / Е.П. Виноградова ; науч. ред. Т. Уткина. – 2-е изд., стер. – Москва : Флинта, 2014. – Ч. II. – 199 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=363458
7. Веселовская, А.З. Математика: логика, множества, отображения. Избранные аспекты в элементарном изложении : учебное пособие / А.З. Веселовская, Н.Б. Шепелявая ; Санкт-Петербургский государственный университет. - 2-е изд., перераб. и доп. - Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербургского Государственного Университета, 2014. - 153 с. - (Высшая математика). - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-288-05599-7 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458126
8. Гейдман, Б. П. Подготовка к математической олимпиаде. Начальная школа. 2–4 классы [Электронный ресурс] / Б.П. Гейдман, И.Э. Мишарина. - Москва : АЙРИС-пресс, 2017. - 128 с. : ил. - (Школьные олимпиады). - ISBN 978-5-8112-6620-3 ; То же . - URL:

http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458664

9. Сборник заданий региональных олимпиад по математике среди учащихся начальных классов 2005-2014 гг.: для студентов направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» Профиль «Начальное образование» / Игракова О. В., авт.-сост., Буренок И. И., сост., Полищук Н. Н., сост.; ФГБОУ ВПО «КубГУ» филиал в г. Славянске-на-Кубани. Факультет педагогики и психологии. - Славянск-на-Кубани : Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО «КубГУ» в г. Славянске-на-Кубани, 2014. - 100 с.

Периодические издания

1. Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1. Математика. Физика. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=journal_red&jid=330573.

2. Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика. Механика. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=journal_red&jid=344860.

3. Квант : [полнотекстовый архив номеров за период: 1970-2010 гг.]. - URL: http://www.kvant.info/old.htm.

4. Математика в высшем образовании. - URL: https://e.lanbook.com/journal/2368#journal_name.

5. Математические труды. - URL: http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1389771.

6. Современная математика и концепции инновационного математического образования . – URL: http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53797.

7. Начальная школа. - URL: http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1709622.

8. Начальная школа плюс до и после. - URL: http://elibrary.ru/contents.asp?issueid=1293677.

9. Начальная школа: проблемы и перспективы, ценности и инновации. – URL: http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=52840.

Интернет ресурсы

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» : сайт. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

2. ЭБС Издательства «Лань» : сайт. - URL: http://e.lanbook.com.

3. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» : сайт. - URL: https://www.biblio-online.ru/catalog/E121B99F-E5ED-430E-A737-37D3A9E6DBFB.

4. eLibrary.ru : научная электронная библиотека : сайт. – URL: http://elibrary.ru/.

5. базы данных компании «Ист Вью» [раздел: Периодические издания (на русском языке)]: сайт. – URL: http://dlib.eastview.com.

6. Математика // Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система : сайт. - URL: http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr=2.2.74.12.

7. Математика и естественно-научное образование // Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система : сайт. - URL: http://window.edu.ru/catalog/?p_rubr=2.2.74.

8. Math-Net.Ru : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН : сайт. - URL: http://www.mathnet.ru.

9. MATH.RU : портал математического образования / Отделение математических наук Российской академии наук : сайт. - URL: http://www.math.ru.

10. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов : сайт. – URL: http://school-collection.edu.ru.

11. Российский общеобразовательный портал : сайт. – URL: http://www.school.edu.ru.

12. Федеральный образовательный портал "Информационно-коммуникационные технологии в образовании": сайт. - URL: http://www.ict.edu.ru/.

13. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) : сайт. - URL: http://fcior.edu.ru.

14. Энциклопедиум: Энциклопедии. Словари. Справочники // ЭБС «Университетская библиотека ONLINE»: сайт. – URL: http://enc.biblioclub.ru/.

СОДЕРЖАНИЕ